III. — La géométrie des masses du tétraèdre orthocentrique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

III. — La géométrie des masses du tétraèdre orthocentrique.

15. — Pour un tétraèdre quelconque, la formule à six termes

$$\overline{\mathrm{MM}}'^2 = - \Sigma a_{ij}^2 \Delta x_i \Delta x_j$$

donnant le carré de la distance de deux points ne peut pas être mise sous la forme

$$\overline{\mathrm{MM}}'^2 = \sigma \cdot \Sigma \lambda_i \cdot (\Delta x_i)^2$$

analogue à celle de la géométrie plane. Puisque $\Sigma \Delta x_i = 0$, l'existence d'une telle formule entraîne la relation

$$0 = \sigma \Sigma \lambda_i (\Delta x_i)^2 + \Sigma a_{ij}^2 \Delta x_i \Delta x_j \equiv \sigma \Sigma \lambda_i \cdot \Sigma (\Delta x_i) ,$$

ce qui exige

$$a_{ij}^2 = \sigma(\lambda_i + \lambda_j) ,$$

et par suite:

$$a_{12}^2 + a_{34}^2 = a_{13}^2 + a_{24}^2 = a_{14}^2 + a_{23}^2 = \sigma(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) ;$$

les sommes des carrés d'arêtes opposées sont égales et le tétraèdre est orthocentrique.

Le tétraèdre orthocentrique est caractérisé par l'existence de quatre nombres $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$ tels que

$$a_{ij}^2 = \sigma(\lambda_i + \lambda_j) .$$

Il en résulte que les aires des quatre faces sont données par les formules:

$$4 \mathrm{A}_1^2 = \sigma^2 (\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_4 + \lambda_4 \lambda_2) \quad \text{etc.},$$

ce qui exige que les paramètres ϖ_{ij} aient les expressions suivantes :

$$4 \varpi_{12} = \sigma^2 \cdot \lambda_3 \lambda_4 , \quad \text{etc.} \ldots$$

On a enfin la condition

$$36\,V^2 = \sigma^3 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \sum \frac{1}{\lambda_i} \; .$$

La condition de rencontre des hauteurs d'un tétraèdre quelconque

$$(A_1\,H) \qquad \frac{x_2}{\varpi_{12}} = \frac{x_3}{\varpi_{13}} = \frac{x_4}{\varpi_{14}} \; ,$$

est

$$\varpi_{12} \cdot \varpi_{34} = \varpi_{13} \cdot \varpi_{24} = \varpi_{14} \cdot \varpi_{23} \; ;$$

elle exige que ϖ_{ij} soit de la forme $\varpi_{ij} = \rho \cdot \mu_i \cdot \mu_i$ avec quatre paramètres μ_i, ce qui revient à prendre, avce les notations ci-dessus:

$$4\,\varpi_{12} = \sigma^2 \lambda_3 \lambda_4 \; .$$

Dans ces conditions, si les coordonnées barycentriques de l'orthocentre H sont (H_i) avec $\Sigma\, H_i = 1$, on devra poser:

$$H_i = \frac{1}{\lambda_i} \; ,$$

avec:

$$\sigma^3 = 36\,V^2 \cdot H_1 H_2 H_3 H_4 \; .$$

$$36\,V^2 = \sigma^3 \cdot \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \; .$$

16. — *Forme spéciale de l'équation cubique pour les tétraèdres orthocentriques.* — Considérons le produit

$$\Pi = \left(\omega - \frac{\sigma}{M} m_1\,\theta_1\right)^{m_1} \cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M} m_2\,\theta_2\right)^{m_2} \cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M} m_3\,\theta_3\right)^{m_3} \cdot$$

$$\cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M} m_4\,\theta_4\right)^{m_4} ,$$

avec des paramètres σ et θ_i non précisés pour le moment. L'équation $\dfrac{d\Pi}{d\omega} = 0$ s'écrit

$$\sum \frac{m_i}{M\omega - \sigma m_i\,\theta_i} = 0 \; ,$$

$$M\omega^3 - \mathcal{P}\omega^2 + \mathcal{Q}\omega - \mathcal{R} = 0 \; ,$$

avec

$$\mathcal{P} = \frac{\sigma}{M} \cdot \Sigma\, \theta_1 m_1 (m_2 + m_3 + m_4) \ ,$$

$$\mathcal{Q} = \frac{\sigma^2}{M^2} \cdot \Sigma\, m_1 (m_2 m_3\, \theta_2 \theta_3 + m_3 m_4\, \theta_3 \theta_4 + m_4 m_2\, \theta_4 \theta_2) \ ,$$

$$\mathcal{R} = \frac{\sigma^3}{M^3}\, m_1 m_2 m_3 m_4\, \Sigma\, \theta_2 \theta_3 \theta_4 \ .$$

Elle est identique à celle donnant les moments d'inertie centraux du quadruplet (m_i) si les conditions suivantes sont vérifiées simultanément:

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma\, m_i m_j \left[\sigma(\theta_i + \theta_j) - a_{ij}^2\right] = 0 \ , \\ &\Sigma\, m_2 m_3 m_4 \left[\sigma^2 (\theta_2 \theta_3 + \theta_3 \theta_4 + \theta_4 \theta_2) - 4 A_1^2\right] = 0 \ , \\ &\qquad \sigma^3\, \Sigma\, \theta_2 \theta_3 \theta_4 = 36\, V^2 \ . \end{aligned}\right.$$

Ces conditions sont remplies quelles que soient les masses m_i si le tétraèdre est orthocentrique avec $\theta_i = \lambda_i$.

Ainsi donc — et c'est encore une propriété caractéristique des tétraèdres orthocentriques — *l'équation en* $\omega = \frac{I}{M}$ *aux moments centraux planaires d'inertie dans le cas d'un quadruplet disposé aux sommets d'un tétraèdre orthocentrique est identique à l'équation donnant les maximum et minimum de la fonction suivante* $\Pi(\omega)$:

$$\Pi \left(\omega - \frac{\sigma}{M} \cdot m_i \lambda_i\right)^{m_i} .$$

17. — Une propriété analogue est à signaler pour la géométrie plane. Pour un triangle quelconque, on aura à considérer l'équation aux maximum — minimum du produit:

$$\Pi = \left(\omega - \frac{\sigma}{M}\alpha p\right)^{\alpha} \cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M}\beta q\right)^{\beta} \cdot \left(\omega - \frac{\sigma}{M}\gamma r\right)^{\gamma} ,$$

α, β, γ sont les masses placées aux sommets du triangle ABC; $M = \alpha + \beta + \gamma$, la masse totale; $\sigma = 2S$; $I = M\omega$; $p = \operatorname{cotg} A$, $q = \operatorname{cotg} B$, $r = \operatorname{cotg} C$; $a^2 = \sigma(q + r)$, etc. Toutes ces formules sont analogues à celles relatives au tétraèdre orthocentrique.

18. — *Formules spéciales au tétraèdre orthocentrique.* — Les calculs de la Géométrie des masses, en coordonnées barycentriques, se présentent généralement sous une forme simplifiée lorsque le tétraèdre de référence est orthocentrique. Nous poserons en introduisant quatre paramètres α_i

$$a_{ij}^2 = \alpha_i + \alpha_j \ , \qquad 4\varpi_{12} = \alpha_3\alpha_4 \ , \quad \text{etc.}$$

les coordonnées de l'orthocentre H seront $H_1H_2H_3H_4$:

$$\alpha_1 H_1 = \alpha_2 H_2 = \alpha_3 H_3 = \alpha_4 H_4 = h \ ,$$
$$H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = 1$$
$$h = \sum \frac{1}{\alpha_i} \ .$$

Pour le volume V du tétraèdre fondamental:

$$h^3 = 36V^2 \cdot H_1 H_2 H_3 H_4 \ ,$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 36V^2 h \ ;$$
$$A_1^2 = \frac{9V^2}{h} H_1(1 - H_1) \ , \qquad \varpi_{12} = \frac{9V^2}{h} \cdot H_1 H_2 \ .$$

Les hauteurs h_i des tétraèdres:

$$h_i^2 = \frac{\alpha_i}{1 - H_i} = \frac{h}{H_i(1 - H_i)} \ .$$

La distance MM′ de deux points $M(x_i)$ et $M'(x_i')$ est généralement dans le cas du tétraèdre orthocentrique

$$\overline{MM}'^2 = \Sigma\, \alpha_i \cdot (\Delta x_i)^2 \ ,$$
$$\Sigma\, x_i = 1 \ , \qquad \Sigma\, x_i' = 1 \ , \qquad \Delta x_i = x_i - x_i' \ .$$

En particulier, la distance d'un point quelconque $M(x_i)$ de l'espace à l'orthocentre H prend la forme:

$$\overline{HM}^2 = -h + \Sigma\, \alpha_i x_i^2 \ , \qquad \Sigma\, x_i = 1 \ ;$$

le rayon ρ de la sphère conjuguée est défini par la relation

$$\rho^2 = -h \ ;$$

l'équation de la sphère conjuguée est:

$$\Sigma \alpha_i x_i^2 = 0 .$$

La formule donnant la distance $r = \mathrm{HM}$ d'un point quelconque M à l'orthocentre est donc

$$r^2 - \rho^2 = \Sigma \alpha_i x_i^2 .$$

Distances de l'orthocentre aux sommets A_i du tétraèdre:

$$\overline{\mathrm{HA}}_i^2 = \alpha_i - h .$$

Soit α le rayon de la première sphère des douze points, dont le centre est le centre G de gravité du tétraèdre homogène:

$$\overline{\mathrm{GH}}^2 = \alpha^2 + \rho^2 , \qquad \mathrm{GH} = \mathrm{OG} .$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 16\alpha^2 ,$$

$$\Sigma a_{ij}^2 = 48\alpha^2 .$$

Si R est le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre de centre O:

$$\overline{\mathrm{OH}}^2 = 4(\alpha^2 + \rho^2) = \mathrm{R}^2 + 3\rho^2 , \qquad \overline{\mathrm{OG}}^2 = \alpha^2 + \rho^2 = \mathrm{R}^2 - 3\alpha^2 ,$$

$$\mathrm{R}^2 = 4\alpha^2 + \rho^2 ,$$

$$\Sigma \overline{\mathrm{HA}}_i^2 = 4\mathrm{R}^2 .$$

Les coordonnées O_i du centre de la sphère circonscrite O sont définies par les équations

$$\Sigma \mathrm{O}_i = 1 , \qquad \mathrm{H}_i + \mathrm{O}_i = \frac{1}{2} .$$

19. — Avec les notations précédentes, l'équation cubique aux moments d'inertie centraux I pour un centre des masses Γ_i est celle qui donne le maximum ou le minimum du produit:

$$\Pi (\mathrm{I} - m_i \alpha_i)^{m_i} ,$$

c'est-à-dire l'équation:

$$\sum_1^4 \frac{m_i}{\mathrm{I} - m_i \alpha_i} = 0 .$$

Sous cette forme — spéciale aux tétraèdres orthocentriques — il est manifeste que les racines sont réelles; elles sont séparées par les nombres $m_i \alpha_i$.

Les moments principaux centraux étant I_1, I_2, I_3, on a pour le tétraèdre orthocentrique :

$$M(I_1 + I_2 + I_3) = M \cdot \Sigma m_i \alpha_i - \Sigma \alpha_i m_i^2 \;;$$

$$M(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1) = \Sigma \alpha_1 \alpha_2 m_1 m_2 (m_3 + m_4) \;;$$

$$M\, I_1 I_2 I_3 = 36 V^2 m_1 m_2 m_3 m_4 \;.$$

Pour que l'ellipsoïde central d'inertie en Γ soit une sphère, il faut que la quadrique conjuguée au tétraèdre, de centre Γ soit une sphère: ce qui exige que le tétraèdre soit orthocentrique et que Γ soit l'orthocentre H. Pour $m_i = H_i$, l'équation cubique a bien une racine triple $I = h$.

Dans un tétraèdre orthocentrique, l'équation du cercle de l'infini se simplifie:

$$\Phi = \Sigma \varpi_{ij} (u_i - u_j)^2 = \frac{9 V^2}{h} [\Omega - \Pi^2] \;,$$

en posant:

$$\Omega = \Sigma H_i u_i^2 \;, \qquad \Pi = \Sigma H_i u_i \;;$$

$\Pi = 0$ est l'équation tangentielle de l'orthocentre; $\Omega = 0$ est l'équation tangentielle de la sphère conjuguée. La condition pour que les u_i soient les distances aux sommets du plan (u_i) est donc:

$$\Phi = 9 V^2 \;, \qquad \Omega - \Pi^2 = h \;.$$

La condition entre les cosinus directeurs $h_i \delta_i$ d'une direction quelconque avec les hauteurs du tétraèdre, est dans le cas des tétraèdres orthocentriques

$$- \Delta \equiv \Sigma \alpha_i \delta_i^2 = 1 \;.$$

La perpendiculaire au plan u_i est définie par les relations

$$\alpha_i \delta_i = \Pi - u_i \;,$$

ou

$$h \delta_i = H_i (\Pi - u_i) \;,$$

les u_i satisfaisant à la condition $\Phi = 9V^2$ et les δ_i à la condition $\Delta = -1$.

Le centre des masses $\Gamma(m_i)$ associé à un plan donné u_i est défini par les relations:

$$m_i = H_i\left(\frac{\Pi}{u_i} - 1\right) .$$

Le moment d'inertie correspondant est, *avec ces expressions des masses*,

$$I = \Sigma\, m_i u_i^2 = \rho^2 ,$$

égal au carré du rayon de la sphère conjuguée.

Inversement, si les masses m_i, quelconques, sont données, le plan principal et central d'inertie, correspondant à la racine I de l'équation cubique a pour équation:

$$\sum \frac{X_i}{I - m_i \alpha_i} = 0 .$$

20. — *Cas particuliers.* — Γ *est dans le plan* A_1A_2H.

$$\frac{m_3}{H_3} = \frac{m_4}{H_4} ;$$

l'équation cubique admet alors la racine simple $I = h$. Le plan central correspondant est le plan:

$$u_1 = 0 \qquad u_2 = 0 \qquad \frac{u_3}{\alpha_3} + \frac{u_4}{\alpha_4} = 0 ,$$

$$\frac{X_3}{H_3} = \frac{X_4}{H_4} ;$$

c'est-à-dire le plan A_1A_2H.

Γ *est sur la hauteur* A_1H. Prenons:

$$m_2 = H_2 , \qquad m_3 = H_3 , \qquad m_4 = H_4 ;$$

racine double $I = h$; racine simple: $I = \frac{m_1\alpha_1}{M}$. Les plans centraux sont les plans passant par la hauteur et le plan mené par Γ parallèlement à la base correspondante. La quadrique d'inertie est de révolution autour de la hauteur.

21. — *Propriétés des tétraèdres orthocentriques solides, homogènes, avec deux arêtes opposées égales.* — L'équation cubique en I, mise sous la forme

$$\frac{\mathrm{I}(m_1 + m_2) - m_1 m_2(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\mathrm{I} - m_1\alpha_1)(\mathrm{I} - m_2\alpha_2)} + \frac{\mathrm{I}(m_3 + m_4) - m_3 m_4(\alpha_3 + \alpha_4)}{(\mathrm{I} - m_3\alpha_3)(\mathrm{I} - m_4\alpha_4)} = 0 ,$$

admet la racine simple

$$\mathrm{I} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) m_1 m_2}{m_1 + m_2} ,$$

dans le cas particulier où le point Γ est sur la surface cubique d'équation

$$\frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}{a_{12}^2} = \frac{\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}}{a_{34}^2} .$$

C'est une surface cubique, circonscrite au tétraèdre, passant par l'orthocentre; elle est, dans la transformation $\mathrm{X}_i \mathrm{X}_i' = 1$, réciproque du plan d'équation

$$\frac{\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2}{a_{12}^2} = \frac{\mathrm{X}_3 + \mathrm{X}_4}{a_{34}^2}$$

parallèle aux arêtes $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ et $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4$, mené par le point (α_i) réciproque de l'orthocentre.

Ainsi sont mises en évidence, trois surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre orthocentrique auxquelles correspondent des cas de résolution de l'équation cubique.

En particulier, si le tétraèdre orthocentrique a deux arêtes opposées égales

$$a_{12} = a_{34} ,$$

la surface correspondante

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4}$$

contient le centre de gravité G. D'où le résultat suivant:

Lorsque, dans un tétraèdre orthocentrique, solide et homogène, deux arêtes opposées sont égales, l'équation aux moments d'inertie centraux de ce corps admet une racine rationnelle:

$$a_{12} = a_{34} \,, \qquad \mathrm{M} = \text{masse du tétraèdre} \,.$$

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{M}}{20} a_{12}^2 \,.$$

(c'est la valeur du moment central du tétraèdre régulier d'arête a_{12}).

22. — *Application aux tétraèdres homogènes avec un trièdre trirectangle.* — Dans le cas d'un tétraèdre OABC, trirectangle en O,

$$\mathrm{OA} = a \,, \qquad \mathrm{OB} = b \,, \qquad \mathrm{OC} = c \,,$$

l'équation de l'ellipsoïde central par rapport aux axes rectangulaires parallèles à OA, OB et OC est:

$$3(b^2 + c^2)\mathrm{X}^2 + 3(c^2 + a^2)\mathrm{Y}^2 + 3(a^2 + b^2)\mathrm{Z}^2$$
$$+ 2bc\,\mathrm{YZ} + 2ca\,\mathrm{ZX} + 2ab\,\mathrm{XY} = \frac{80}{\mathrm{M}} \,.$$

Prenons une densité telle que M = 80. L'équation en S de l'ellipsoïde prend la forme:

$$\tau^3 + (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 3a^4 - 3b^4 - 3c^4)\tau$$
$$+ 2(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \,,$$

en posant:

$$\mathrm{S} = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \tau \,.$$

Sous cette forme, lorsque deux arêtes opposées sont égales (par exemple $c^2 = a^2 + b^2$), l'équation a bien une racine rationnelle $\tau = 0$, $\mathrm{S} = 4c^2$, conformément au théorème précédent.