

ÉTUDE RATIONNELLE DU PROBLÈME DE LA TRISECTION DE L'ANGLE

Autor(en): **d'Ocagne**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1934)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-25987>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ÉTUDE RATIONNELLE DU PROBLÈME DE LA TRISECTION DE L'ANGLE

PAR

M. D'OCAGNE, Membre de l'Institut (Paris).

GÉNÉRALITÉS.

1. — Une construction géométrique n'est dite *rigoureuse* que si elle peut s'effectuer en toute rigueur au moyen d'un nombre fini de droites et de cercles tracés sans tâtonnement, ce qui n'a lieu, comme on sait, que si le problème traité ne dépend que d'équations linéaires ou résolubles par radicaux carrés.

Si cette condition n'est pas remplie, on ne peut avoir recours qu'à une construction *approchée* avec laquelle l'erreur commise soit négligeable, construction qui peut alors être considérée comme *pratiquement exacte*.

En fait, même, vu les petites erreurs accidentelles inséparables de tout tracé de figure géométrique, de telles constructions ne sont guère moins satisfaisantes que des constructions rigoureuses.

Mais, parmi ces constructions approchées, j'ai eu l'occasion de faire remarquer¹ qu'il y avait lieu d'établir une distinction essentielle.

Les unes, *exemptes de tout tâtonnement*, permettent d'obtenir, à défaut du résultat théoriquement exact, un résultat approché n'en différant que d'une quantité, de grandeur déterminée, pouvant être tenue pour négligeable. Ce sont ces constructions que j'ai proposé d'appeler *normales*.

¹ *Revue générale des sciences*, t. XLIV, p. 7; 1933.

Les autres, au contraire, *comportant un certain tâtonnement* dans la mise en place d'une des lignes qui y interviennent (tâtonnement, d'ailleurs, d'une réalisation toujours rapide et que peut faciliter l'emploi d'une courbe d'erreur), aboutiraient, si leur exécution était affranchie de toute erreur, au résultat théoriquement exact. Je dis de celles-ci qu'elles sont *anormales*.

2. — Il va sans dire que s'il s'agit d'un problème d'ordre transcendant, il ne peut être question que de constructions normales. C'est le cas, par exemple, pour la quadrature du cercle, ou, plus généralement, pour la rectification d'un arc de cercle quelconque. On voudra bien, à cette occasion, me permettre de rappeler que j'ai fait connaître¹ de ce dernier problème une solution normale, d'une extrême simplicité, fournissant en pratique toute la précision que l'on peut désirer.

Pour les problèmes d'ordre algébrique, on a le choix entre des solutions normales et des solutions anormales; c'est notamment le cas du problème de la trisection de l'angle, auquel va être consacrée cette étude.

LA TRISECTION DE L'ANGLE.

3. — Il convient de remarquer tout d'abord que l'on peut se borner au seul cas des angles aigus, attendu que, s'il s'agit d'un angle obtus, il suffit, pour en avoir le tiers, de retrancher le tiers de l'angle aigu supplémentaire de l'angle de 60° dont la construction est rigoureuse.

La plupart des solutions proposées pour le problème de la trisection sont du type anormal, à commencer par celle, dite de Nicomède, la plus classique, qui peut s'énoncer ainsi: *si un cercle, de rayon r quelconque, ayant pour centre le sommet O de l'angle AOB à trisecter, coupe les côtés de cet angle en A et B ², la droite issue de B qui coupe le cercle en C et la droite OA en D , de*

¹ *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^{me} série, t. VII, p. 1; 1907. Voici cette construction: si le point C de la corde AB est tel que $AC = \frac{2}{3}AB$ et que le rayon OC coupe l'arc AB en D , on a très sensiblement corde $AD = \frac{2}{3}$ arc AB .

² Le lecteur est prié de faire la figure.

telle sorte que $CD = r$, est parallèle à la trisectrice cherchée. En effet, les triangles OBC et COD étant isocèles, on a les égalités d'angles $AOB = OBD + ODB$, et $OBD = OCB = 2ODB$, d'où $AOB = 3ODB$.

J'ai, pour ma part, fait connaître¹ une propriété fort simple se traduisant par une autre construction anormale: *si la trisectrice issue de O coupe en E la corde AB du cercle et en F le cercle de centre A et de rayon AO, on a $EF = OA$* . En effet, si l'on pose $AOB = \omega$, les angles AOF et AFO sont égaux à $\frac{\omega}{3}$, OAB et OBA à $\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, on en déduit que $OAF = \pi - \frac{2\omega}{3}$, puis que $EAF = OAF - OAB = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3}$ et que $AEF = \pi - EOB - OBA = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{2\omega}{3}$; donc $EAF = AEF$; par suite, le triangle FAE est isocèle et $EF = AF = r$.

Mais les solutions les plus intéressantes, au point de vue du tracé, sont les solutions normales; nous allons en examiner ici quelques-unes particulièrement dignes de remarque.

4. — Rappelons tout d'abord qu'il n'est ici question que d'angles ω compris entre 0 et 90° . Toute construction normale appliquée à un tel angle fournit un angle θ présentant par rapport à $\frac{\omega}{3}$ un certain écart ε , d'ailleurs supposé négligeable, mais qui peut se déterminer mathématiquement et dont la considération conduit à une nouvelle distinction à observer parmi ces solutions normales: suivant que, pour ω variant de 0 à 90° , ε croît constamment à partir de 0 jusqu'à une certaine valeur \mathcal{E} , ou s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = 90^\circ$, en présentant un maximum dans l'intervalle, la solution est dite à *écart ouvert jusqu'à \mathcal{E}* , ou à *écart fermé*. Notre attention va d'abord se porter sur deux solutions à écart fermé, puis sur une troisième à écart ouvert.

PREMIÈRE SOLUTION NORMALE (A ÉCART FERMÉ).

5. — Marquons sur l'axe Ox les points O'', O' et A tels qu'en suivant le sens positif on ait $O''O' = O'O = OA = 1$, les

¹ *Revue générale des sciences*, t. XLIV, p. 625; 1933.

perpendiculaires à Ox menées par ces points étant dénotées $O''y, O'y, Oy, Ay$ (comme si y désignait le point à l' ∞ dans la direction perpendiculaire à Ox), et menons par les points O, O', O'' les droites $OB, O'B, O''B_1 B_2$ (qui coupe OB en B_1 et $O'B$ en B_2)¹ faisant respectivement avec Ox les angles $\omega, \frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}$.

Le lieu du point B est, bien entendu, le cercle Γ de centre O , de diamètre $O'A$. Cherchons le lieu du point B_1 .

Si nous plaçons l'origine en O'' , les droites OB_1 et $O''B_1$ ont respectivement pour équations

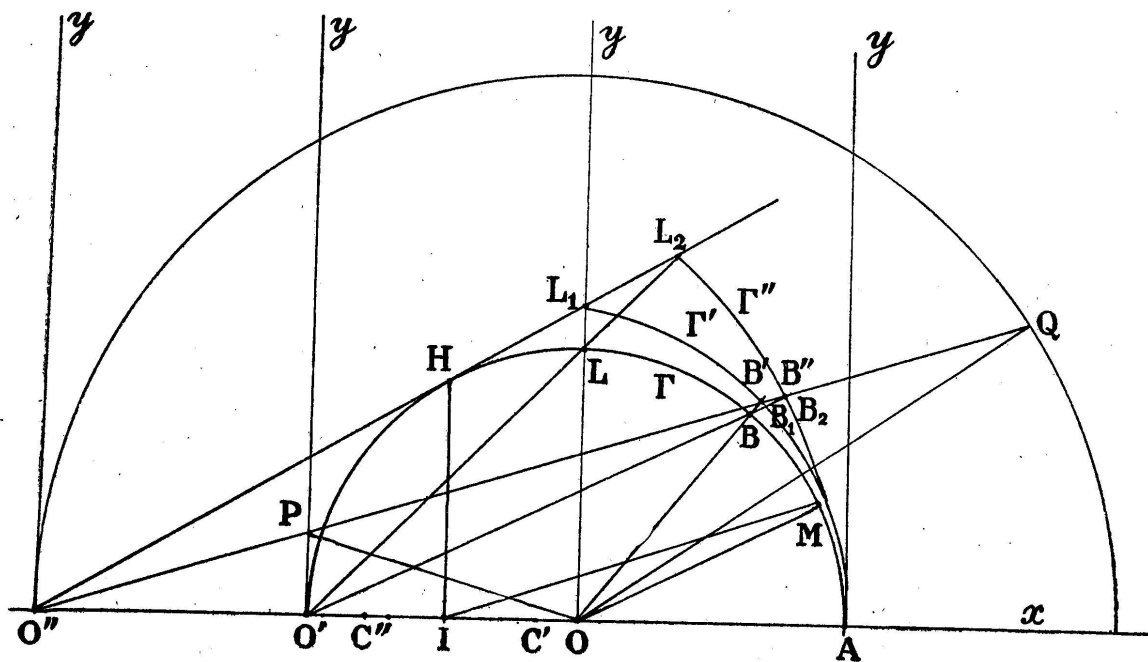
$$y = (x - 2) \operatorname{tg} \omega \quad \text{et} \quad y = x \operatorname{tg} \frac{\omega}{3}.$$

Comme on sait que

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{3 \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} - \operatorname{tg}^3 \frac{\omega}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{3}},$$

il en résulte, par élimination de ω , pour le lieu cherché, l'équation

$$x(x^2 + y^2) - 3x^2 + y^2 = 0, \quad (1)$$



¹ Les points B_1 et B_2 dont il est ici question se confondent, à un écart tout à fait insensible près, avec les points désignés sur la figure par B' et B'' , qui seront définis plus loin.

cubique circulaire Γ_1 bien connue, dite *trisectrice de Maclaurin*. Symétrique par rapport à Ox , elle se compose d'une boucle tangente en A à Ay , ayant en O'' un point double où les tangentes sont inclinées à 60° sur Ox , et se prolongeant au-delà par deux branches infinies ayant pour asymptote commune la droite symétrique de $O'y$ par rapport à O'' .

6. — Avant d'aller plus loin faisons voir très simplement que cette cubique Γ_1 est une *cissoïdale*, ce terme désignant une courbe dont, pour un certain pôle, le vecteur est la somme algébrique des vecteurs d'une droite et d'un cercle, ou la différence algébrique de ces vecteurs (ce cas se ramenant immédiatement au précédent si l'on prend la symétrique par rapport au pôle, soit de la droite, soit du cercle intervenant dans la définition).

Pour démontrer la propriété en question, il suffit de remarquer que, puisque par définition $B_1OA = 3B_1O''A$, on a $O''B_1O = 2B_1O''A$. Mais si $O''B_1$ coupe $O'y$ en P , le triangle POO'' étant isocèle, on a aussi $OPB_1 = 2B_1O''A$, d'où résulte que le triangle OPB_1 est isocèle comme ayant ses angles à la base égaux. Si maintenant $O''B_1$ coupe en Q le cercle de centre O et de rayon OO'' , le triangle $OO''Q$ est également isocèle; il s'ensuit que $O''P = B_1Q$ et que $O''B_1 = O''Q - O''P$, ce qui montre que *la cubique Γ_1 est une cissoïdale pour la droite $O'y$ et le cercle de centre O et de rayon OO''* .

7. — Mais, puisque nous nous bornons aux seuls angles inférieurs à 90° , nous n'avons à considérer que l'arc de Γ_1 allant du point A au point L_1 où Oy est coupé par la droite issue de O'' inclinée à 30° sur $O''x$, qui n'est autre que la tangente $O''H$ au cercle Γ .

Si on effectue (notamment par le procédé résultant de la dernière propriété indiquée) le tracé de cet arc AL_1 , on ne peut manquer d'être frappé de son analogie d'aspect avec un arc de cercle, ce qui conduit à comparer cet arc de la cubique Γ_1 avec l'arc de cercle Γ' qui, partant du point A tangentielllement à Ay , aboutit au point L_1 .

Si l'on prend encore O'' comme origine des coordonnées, on a, pour le point A , $x = 3$, $y = 0$, pour le point L_1 , $x = 2$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

et, si on appelle α l'abscisse du centre C' de Γ' , l'équation de ce cercle s'écrit

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x + 6\alpha - 9 = 0. \quad (2)$$

Il suffit d'exprimer que cette équation est satisfaite par les coordonnées de L_1 pour en tirer $\alpha = \frac{11}{6}$, ce qui donne pour le rayon du cercle

$$r = 3 - \alpha = \frac{7}{6}, \quad (3)$$

d'où résulte que

$$C'O = \frac{O'O}{6}.$$

Finalement, le cercle Γ' a pour équation

$$3x^2 + 3y^2 - 11x + 6 = 0. \quad (4)$$

Si l'on représente par f le premier membre de cette équation, la pente de la tangente en tout point de Γ' est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{6x - 11}{6y}.$$

Elle prend, au point L_1 , la valeur

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\sqrt{3}}{12}. \quad (5)$$

Comparons aux valeurs (4) et (5) de r et $\frac{dy}{dx}$, celles des mêmes éléments (r désignant alors le rayon de courbure) pour la cubique Γ_1 aux mêmes points A et L_1 .

L'équation (1) de cette cubique donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y(x + 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x + 1),$$

et comme, en A, $x = 3$, $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, il vient, pour la valeur

¹ Il est clair, puisque le segment $O'O$ pris comme unité de longueur est arbitraire, que l'on pourra prendre pour sa mesure un nombre de millimètres multiple de 6, par exemple 30 mm., ce qui donnera $C'O = 5$ mm.

absolue de r en ce point,

$$r = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9}{8} . \quad (6)$$

Quant à la pente en L_1 , elle est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2 + y^2 - 6x}{2y(x+1)} = - \frac{\sqrt{3}}{9} . \quad (7)$$

La différence des r , évalués en (3) et (6), est donc égale à $\frac{7}{6} - \frac{9}{8}$, ou $\frac{2}{48} = 0,041$; celle des pentes, évaluées en (5) et (7), à $-\frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{9}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{36} = 0,048$. Si petites sont ces différences que l'on peut en conclure que, de A en L_1 , l'arc du cercle Γ' , partout extérieur à l'arc de la cubique Γ_1 , est tout près de se confondre avec lui. On pourra donc, sans grande erreur, substituer le premier au second, et, au lieu de prendre le point de rencontre B_1 de OB et de Γ_1 , prendre celui B' de OB et de Γ' , pour le joindre à O'' en vue de déterminer la direction de la trisectrice cherchée.

8. — Pour mieux se rendre compte du degré de précision ainsi obtenu, on peut calculer la valeur exacte de l'angle $B'O''A = \theta$, ainsi construit, et la comparer à celle de $\frac{\omega}{3}$. Si l'on pose $\text{tg } \omega = t$, l'équation de OB, toujours avec l'origine en O'' , est

$$y = t(x - 2) . \quad (8)$$

Remplaçant y par cette valeur dans l'équation (4) de Γ' , on a

$$3(1 + t^2)x^2 - (12t^2 + 11)x + 12t^2 + 6 = 0 .$$

Le point B' étant celui des points de rencontre de OB et de Γ' qui a la plus grande abscisse, il faut, dans l'expression tirée de là pour x , prendre le radical avec le signe $+$, ce qui donne

$$x = \frac{12t^2 + 11 + \sqrt{48t^2 + 49}}{6(1 + t^2)} . \quad (9)$$

Remarquons en passant que, si l'on pose $6(1 + t^2) = u$, on peut mettre cette formule sous la forme plus simple

$$x = \frac{2u - 1 + \sqrt{8u + 1}}{u} \quad (9 \text{ bis})$$

Ayant calculé x et y par (9) et (8), on en tire

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x},$$

et, par suite, θ .

Faisons ce calcul pour $\omega = 45^\circ$, valeur moyenne entre les limites 0 et 90° . Ici, $t = 1$, et l'on trouve

$$x = 2,737, \quad y = 0,737,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{0,737}{2,737} \quad \text{et} \quad \theta = 15^\circ 4' 15''.$$

Par suite,

$$\varepsilon = \theta - \frac{\omega}{3} = 4' 15''.$$

Cet écart est inférieur à $6'$, le dixième de degré, que l'on peut regarder comme l'extrême limite de la précision qui puisse être atteinte dans le dessin, qui même, sans doute, ne l'est effectivement jamais; on est donc en droit de le tenir pour strictement négligeable. Ainsi se trouve justifiée la construction normale, non encore proposée, semble-t-il, qui peut s'énoncer ainsi:

Si $OC' = \frac{AO}{6}$ et $OO'' = 2AO$, et que l'on trace le cercle Γ' de centre C' et de rayon $C'A$, la droite joignant O'' au point de rencontre B' de OB et de Γ' est parallèle à la trisectrice de l'angle AOB .

DEUXIÈME SOLUTION NORMALE (A ÉCART FERMÉ).

9. — Cherchons maintenant le lieu du point B_2 d'intersection des droites $O'B$ et $O''B_1$, respectivement inclinées à $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega}{3}$ sur Ox , dont les équations sont

$$y = (x - 1) \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad \text{et} \quad y = x \operatorname{tg} \frac{\omega}{3}.$$

En égalant deux expressions de $\operatorname{tg} \omega$, on a, d'autre part,

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{3 \operatorname{tg} \frac{\omega}{3} - \operatorname{tg}^3 \frac{\omega}{3}}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{3}} .$$

L'élimination de ω entre ces trois équations donne, pour le lieu cherché, l'équation

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 - (x^2 + y^2) = 0 . \quad (10)$$

Elle définit un limaçon de Pascal¹ Γ_2 , symétrique par rapport à Ox qu'il coupe aux points $O''(x = 0)$, $O'(x = 1)$ et $A(x = 3)$. En O' et A les tangentes sont $O'y$ et Ay ; en O'' , point double, les tangentes sont, comme pour la cubique Γ_1 du n° 5, inclinées à 60° sur $O''x$. Ce limaçon coupe, en outre, $O''y$ aux points $y = \pm 1$. On sait d'ailleurs qu'il constitue la podaire du cercle de diamètre $O''A$ pour le point O'' .

10. — Mais, comme dans le cas de la cubique Γ_1 , nous n'avons à nous occuper que de l'arc de cette quartique Γ_2 allant du point A au point L_2 correspondant à $\omega = 90^\circ$, donné par l'intersection de la droite $O'L$, à 45° sur Ox , et de la droite $O''H$, à 30° sur Ox , qui n'est autre que la tangente menée de O'' au cercle Γ .

Ces deux droites ont respectivement pour équations

$$y = x - 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}} ,$$

d'où l'on tire, pour les coordonnées de L_2 , les valeurs

$$x = k\sqrt{3} , \quad y = k \quad \text{avec} \quad k = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} .$$

Remarquons en passant qu'il résulte de là que

$$\overline{O''L_2}^2 = x^2 + y^2 = 4k^2 = (1 + \sqrt{3})^2 ,$$

¹ Du nom de son premier inventeur, non pas Blaise Pascal mais son père Etienne qui a fondé lui-même sur l'emploi de cette courbe un procédé de trisection de l'angle, attendu que, l'angle $\angle xO''B_1$ étant égal aux $\frac{2}{3}$ de $\angle xO'B_1$, on a $\angle O'B_1O'' = \frac{xO'B_1}{3}$.

c'est-à-dire que $O''L_2 = 1 + \sqrt{3}$, et, puisque $O''H = \sqrt{3}$,

$$HL_2 = 1 .$$

Ici encore, on est conduit à comparer à l'arc de quartique Γ_2 allant de A en L_2 , l'arc du cercle Γ'' tangent en A à Ay et aboutissant en L_2 .

L'équation de ce cercle étant encore de la forme (2) du n° 7, il suffit d'écrire qu'elle est satisfaite par les coordonnées ci-dessus du point L_2 pour en tirer

$$\alpha = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} .$$

Or, $\frac{3}{2}$ est l'abscisse du milieu I de OO' , projection de H sur cette droite, et $\frac{\sqrt{3}}{6}$ la longueur de $\frac{IH}{3}$. On voit donc que le centre C'' de ce cercle Γ'' est tel que

$$C''I = \frac{IH}{3} .$$

Quant à son rayon $C''A$, ou r , il est donné par

$$r = C''I + IA = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{2} . \quad (11)$$

L'équation du cercle Γ'' peut dès lors s'écrire

$$3(x^2 + y^2) - (9 - \sqrt{3})x - 3\sqrt{3}y = 0 . \quad (12)$$

La pente de la tangente en chacun de ses points est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{6x - (9 - \sqrt{3})}{6y} .$$

Elle prend au point L_2 la valeur

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2}{3} (3 - \sqrt{3}) . \quad (13)$$

Cherchons maintenant les mêmes éléments (r en A, $\frac{dy}{dx}$ en L₂) pour la quartique Γ_2 . De l'équation (10) on déduit

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 + 4xy^2 - 12x^2 - 4y^2 + 6x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3 + 4x^2y - 8xy - 2y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 12y^2 + 4x^2 - 8x - 2.\end{aligned}$$

En A, où $x = 3$, $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, la valeur absolue du rayon de courbure r est donnée par

$$r = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9}{5}. \quad (14)$$

Quant à la pente en L₂, elle résulte de

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{8\sqrt{3}k^2 - 20k + 3\sqrt{3}}{8k^2 - 4\sqrt{3}k - 1},$$

avec $k = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, et donc $k^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$. Cette substitution donne

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{2 + \sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3}} = - \frac{4 + 3\sqrt{3}}{11}. \quad (15)$$

La différence des rayons r de Γ'' et Γ_2 en A, donnés par (11) et (14), a pour valeur

$$\frac{9}{5} - \frac{9 + \sqrt{3}}{6} = 0,014 ;$$

celle des pentes, données par (13) et (15),

$$- \frac{4 + 3\sqrt{3}}{11} + \frac{6 - 2\sqrt{3}}{3} = \frac{54 - 31\sqrt{3}}{33} = 0,0093 .$$

Ces différences étant sensiblement moindres que celles obtenues dans le cas de la cubique Γ_1 font immédiatement apparaître que la substitution du cercle Γ'' à la cubique Γ_2 , de A à L₂, comportera une plus grande approximation que celle du cercle Γ'

à la cubique Γ_1 . En réalité même, cette approximation est surprenante, comme on va voir.

11. — C'est sur cet emploi du cercle Γ'' , au lieu de la quartique Γ_2 , que repose la très remarquable solution du problème de la trisection due à M. Kopf et à laquelle M. Oscar Perron a consacré récemment une étude approfondie¹, dérivant, au reste, d'une tout autre méthode que celle qui est ici suivie.

Pour évaluer le degré de précision donné par cette solution, on peut procéder comme dans le cas du cercle Γ' (n° 8), c'est-à-dire, en prenant le point de rencontre B'' de $O'B$ avec le cercle Γ'' , calculer l'angle $B''O''A$, désigné par θ , pour voir de combien il diffère de $\frac{\omega}{3}$.

Si l'on pose ici $\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = t$, on a pour l'équation de la droite $O'B$

$$y = t(x - 1). \quad (16)$$

Remplaçant y par cette valeur dans l'équation (12) du cercle Γ'' , on obtient l'équation

$$3(1 + t^2)x^2 - (6t^2 + 9 - \sqrt{3})x + 3(t^2 - \sqrt{3}) = 0,$$

dont la plus grande racine est l'abscisse du point B'' . Elle a pour valeur

$$x = \frac{6t^2 + 9 - \sqrt{3} + \sqrt{24(3 + \sqrt{3})t^2 + 6(14 + 3\sqrt{3})}}{6(1 + t^2)} \quad (17)$$

qui, si l'on pose, comme au n° 8, $6(1 + t^2) = u$, prend la forme

$$x = \frac{u + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{4(3 + \sqrt{3})u + 6(2 - \sqrt{3})}}{u}. \quad (17 \text{ bis})$$

x et y étant calculés au moyen de (16) et (17), on a θ par $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$, puis $\varepsilon = \theta - \frac{\omega}{3}$. Mais, par de laborieux calculs, autrement et d'ailleurs habilement conduits, M. Perron a dressé

¹ *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften* (1933, p. 439). Cette note renvoie à celle de M. Kopf (*Ibid.*, 1919, p. 341).

le tableau des valeurs de ε pour ω variant de 12 en 12°, de 0 à 90°. Voici ce tableau:

ω	ε	ω	ε	ω	ε
0° . . .	0	36° . . .	4",23	72° . . .	14",76
12° . . .	0",18	48° . . .	8",58	84° . . .	8",47
24° . . .	1",38	60° . . .	13",08	90° . . .	0

Au surplus le maximum de ε , qui a lieu pour $\omega = 69^\circ 57' 40''$, a pour valeur 14",912.

Cette étonnante précision montre que la solution de M. Kopf est incontestablement celle qui serre de plus près la solution rigoureuse non réalisable, au point même que, non en théorie sans doute, mais en fait, elle peut en être prise pour l'équivalent.

Redisons en quoi elle consiste: I étant le milieu de OO' et IC'' égal à $\frac{IH}{3}$, si la droite $O'B$ coupe en B'' le cercle de centre C'' et de rayon $C''A$, la droite $O''B''$ est, sans aucune erreur appréciable, parallèle à la trisectrice de l'angle AOB .

Mais, quel que soit le très grand intérêt théorique de cette curieuse solution normale, on peut en imaginer d'autres plus simples qui, sans aboutir à d'aussi minimes écarts, n'en comportent pourtant que de pratiquement négligeables. A ce point de vue, la solution suivante semble mériter une mention spéciale.

TROISIÈME SOLUTION NORMALE (A ÉCART OUVERT).

12. — Rappelons tout d'abord qu'une solution normale est à écart ouvert si l'écart ε entre l'angle θ construit et $\frac{\omega}{3}$ croît constamment avec ω variant de 0 à 90°. Si la valeur atteinte par ε pour $\omega = 90^\circ$ est acceptable, la solution est entièrement valable. Sans qu'il en soit ainsi, ε peut atteindre une limite acceptable pour une valeur λ de ω comprise entre 45 et 90°; si d'ailleurs il n'en était pas ainsi, la solution serait à rejeter. Supposons donc que λ satisfasse à la condition requise; alors, lorsque ω est supérieur à λ , il suffit de trisecter le complément de ω , qui est, lui, inférieur à λ , et de retrancher le tiers obtenu de l'angle de 30°, construit rigoureusement.

13. — Tirons maintenant par le milieu M de l'arc AB (donné par la parallèle OM à O'B) la parallèle à la trisectrice de l'angle AOB. Elle a pour équation, si l'origine est, cette fois, prise en O,

$$\left(y - \sin \frac{\omega}{2}\right) \cos \frac{\omega}{3} = \left(x - \cos \frac{\omega}{2}\right) \sin \frac{\omega}{3}.$$

L'abscisse de son point de rencontre avec Ox, pour $y = 0$, est donnée par

$$x = -\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{3}\right)}{\sin \frac{\omega}{3}} = -\frac{\sin \frac{\omega}{6}}{2 \sin \frac{\omega}{6} \cos \frac{\omega}{6}} = -\frac{1}{2 \cos \frac{\omega}{6}}.$$

L'angle $\frac{\omega}{6}$ étant au plus égal à 15° , son cosinus diffère peu de l'unité et cette abscisse n'est que de peu supérieure en valeur absolue à $\frac{1}{2}$. De façon plus précise, le point obtenu sur Ox n'est, au-delà du milieu I de OO' (dans le sens de O vers O'), qu'à une distance δ de ce milieu I donnée par

$$\delta = \frac{1 - \cos \frac{\omega}{6}}{\cos \frac{\omega}{6}}.$$

Le plus grande valeur, pour $\frac{\omega}{6} = 15^\circ$, est

$$\delta = 0,01765,$$

grandeur pratiquement négligeable. Si l'on prend, dès lors, pour direction de la trisectrice celle de la droite IM, le tiers d'angle approché θ ainsi construit sera donné par

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{1}{2} + \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{2 \cos\left(30^\circ + \frac{\omega}{4}\right) \cos\left(30^\circ - \frac{\omega}{4}\right)}.$$

Pour $\omega = 90^\circ$, cette formule donne $\theta = 30^\circ 21' 41''$, donc un écart de $21' 41''$ qui ne dépasse le tiers de degré, c'est-à-dire les $20'$, que de $1' 41''$, quantité négligeable. Or, le tiers de degré

constitue, pour la pratique ordinaire du dessin, un écart parfaitement admissible. En tout cas, pour $\omega = 60^\circ$, l'écart n'est plus que de $6' 14''$, environ le dixième de degré, grandeur absolument négligeable; on est donc assuré d'avoir par ce moyen toute la précision désirable en prenant pour la limite λ définie au n° 12 la valeur 60° . Si même on admet pour λ la valeur 45° , l'écart correspondant tombe à $10''$, ce qui équivaut à une précision de même ordre que celle donnée par le procédé Kopf.

Finalement, on peut dire qu'avec une précision suffisante jusqu'à 90° et pleinement satisfaisante jusqu'à 60° , *la droite joignant le milieu I du rayon OO' au milieu M de l'arc AB est parallèle à la trisectrice de l'angle AOB.*

Il ne semble pas possible de pousser plus loin la simplicité de la construction.

LES FAISCEAUX HOMOPONCTUELS DE COURBES PLANES

PAR

M. D'OCAGNE, Membre de l'Institut (Paris).

1. — Cette note a pour but d'attirer l'attention sur une notion qui ne semble pas avoir encore été envisagée et qui peut donner lieu à des exercices non dénués d'intérêt.

Si les courbes d'un certain faisceau (système simplement infini) découpent sur toutes les tangentes d'une courbe (M) des ponctuelles semblables entre elles, nous dirons que ce faisceau est *homoponctuel* pour la courbe (M) appelée sa *base*. Si ce faisceau est homoponctuel pour chacune des courbes qui le composent, prise pour base, nous le qualifierons, par raison de simplicité, d'*autoponctuel*, alors que le terme d'*autohomoponctuel* eût sans doute été plus rationnel.