SUR UN THÉORÈME DE COURNOT, II

SUR UN THÉORÈME DE COURNOT, II

PAR

D. Mirimanoff (Genève).

Le théorème de Cournot dont je m'occuperai dans ce travail et auquel j'ai déjà consacré une note ici même [1], s'énonce ainsi: « A mesure qu'on multiplie les épreuves, le nombre des répartitions possibles augmentant, la probabilité de chaque valeur, pour le rapport du nombre des événements A à celui des événements B, va en diminuant, mais d'autant plus rapidement que le rapport en question s'écarte plus du rapport entre les probabilités de A et de B, et d'autant plus lentement qu'il s'en rapproche davantage. »

Cournot affirme donc d'une part (première partie du théorème) que:

1° La probabilité en question est une fonction décroissante du nombre des épreuves,

et d'autre part (seconde partie du théorème) que:

2° Cette probabilité décroît d'autant plus rapidement que le rapport des fréquences de A et de B s'écarte davantage du rapport des probabilités de A et de B.

Dans la note que je viens de citer j'ai montré que la première partie du théorème se déduit très simplement d'un théorème d'arithmétique élémentaire. Je ferai voir qu'on peut établir la seconde à l'aide de la formule sommatoire d'Euler.

---

[1] *L'Enseignement mathém.*, t. XXXII, p. 151, 1933.

1. — Soient s le nombre des épreuves, p la probabilité de l'événement A, $q = 1 - p$ celle de l'événement B, $P(m, s)$ la probabilité pour que l'événement A se réalise m fois au cours de s épreuves. On sait que cette probabilité est donnée par la formule

$$P(m, s) = \frac{s!}{m!\,(s-m)!}\,p^m q^{s-m}\,.$$

Soit maintenant c un nombre entier quelconque. Lorsque $s = c$, les fréquences relatives possibles de A sont des fractions de la forme $\frac{a}{c}(a = 0, 1, \ldots, c)$. Pour retrouver ces fréquences, lorsque $s > c$, il faut et il suffit que s soit un multiple quelconque cn de c et que le nombre de réalisations m soit un multiple an de a. Si l'on pose $c = a + b$, les fréquences $1 - f$ de B sont données par la formule $1 - f = \frac{b}{c}$.

Il suffit de montrer que

$$\frac{P(a(n+1)\,,\,c(n+1))}{P(an\,,\,cn)}$$

diminue, lorsque $\frac{a}{b}$ s'écarte de $\frac{p}{q}$.

Envisageons le rapport

$$\frac{P(a(n+1)\,,\,c(n+1))}{P(an\,,\,cn)} : \frac{P((a-1)(n+1)\,,\,c(n+1))}{P((a-1)n\,,\,cn)}\,. \qquad (1)$$

Ce rapport s'écrit $\varphi(n)\frac{p}{q}$, si l'on pose

$$\varphi(n) = \frac{((a-1)n+1)\ldots((a-1)n+a-1)\times((b+1)n+1)\ldots((b+1)n+b+1)}{(an+1)\ldots(an+a)\times(bn+1)\ldots(bn+b)}$$

En particulier, pour $a = 1$,

$$\varphi(n) = \frac{((b+1)n+1)((b+1)n+2)\ldots((b+1)n+b+1)}{(bn+1)(bn+2)\ldots(bn+b)(n+1)}\,.$$

2. — Je commencerai par démontrer le lemme suivant:

Lemme. — Si $a \leqq b$, $\varphi(n)$ est une fonction croissante de n, en d'autres termes

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) \ldots$$

Démonstration. — 1° Lorsque $a = 1$, la démonstration est immédiate, puisque $\varphi(n)$ est un produit de fractions, chacune desquelles est une fonction croissante de n.

2° $a \geqq 2$. — Je dis qu'il suffit de démontrer le lemme pour $b = a$. Mettons les variables a et b en évidence, écrivons $\varphi(n;\, a,\, b)$ au lieu de $\varphi(n)$. On vérifie aisément que

$$\varphi(n\,;\, a\,,\, b) = \varphi(n\,;\, a\,,\, a)\, \varphi(n\,;\, a + 1\,,\, b)\,.$$

Si $a + 1 < b$, on appliquera la même transformation à $\varphi(n;\, a + 1,\, b)$, etc.

Supposons donc $b = a$.

Je commencerai par montrer que

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2)\,.$$

En effet

$$\varphi(0) = \frac{(a-1)\,!\,(a+1)\,!}{a\,!\,a\,!} = \frac{a+1}{a}\,,$$

$$\varphi(1) = \frac{2a+1}{2a-1}\,.$$

Donc

$$\frac{\varphi(1)}{\varphi(0)} = \frac{2a^2 + a}{2a^2 + a - 1} > 1\,.$$

De même

$$\varphi(2) = \frac{(2a-1)(3a+1)(3a+2)}{(2a+1)(3a-1)(3a-2)}\,.$$

D'où

$$\frac{\varphi(2)}{\varphi(1)} = \frac{(2a-1)^2(3a+1)(3a+2)}{(2a+1)^2(3a-1)(3a-2)} = \frac{36a^4 - 19a^2 + a + 2}{36a^4 - 19a^2 - a + 2} > 1\,.$$

On a donc bien

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2)\,.$$

Il suffit par conséquent de montrer que $\varphi(n)$ est une fonction croissante de n pour $n \geqq 2$ ou *a fortiori* que $\varphi(n)$ est une fonction croissante de la variable continue n dans l'intervalle $(2, \infty)$, ou encore que $\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}$ est positive dans cet intervalle.

Or

$$\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} = (a-1)\left\{\frac{1}{(a-1)n+1} + \frac{1}{(a-1)n+2} + \dots + \frac{1}{(a-1)n+a-1}\right\}$$
$$+ (a+1)\left\{\frac{1}{(a+1)n+1} + \frac{1}{(a+1)n+2} + \dots + \frac{1}{(a+1)n+a+1}\right\}$$
$$- 2a\left\{\frac{1}{an+1} + \frac{1}{an+2} + \dots + \frac{1}{an+a}\right\}$$

On peut, sans troubler l'égalité, introduire dans les accolades les termes $\frac{1}{(a-1)n}$ (dans la première), $\frac{1}{(a+1)n}$ (dans la seconde), $\frac{1}{an}$ (dans la troisième).

Pour établir l'inégalité $\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} > 0$, je vais évaluer la somme

$$a\left\{\frac{1}{an} + \frac{1}{an+1} + \dots + \frac{1}{an+a}\right\}$$

à l'aide de la formule sommatoire d'Euler; je remplacerai dans l'expression obtenue a par $a-1$ et $a+1$ et j'obtiendrai ainsi une valeur approchée (par défaut) de $\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)}$.

La formule sommatoire d'Euler, que j'arrête au quatrième terme, s'écrit [1]

$$\sum_0^m f(x) = \int_0^m f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f(m) + f(0)) + \frac{B_1}{2}(f'(m) - f'(0))$$
$$- \frac{B_2}{4\,!}(f'''(m) - f'''(0)) - \int_0^m P_5(x) f^{(5)}(x)\,dx \ ,$$

où

$$B_1 = \frac{1}{6}\ , \qquad B_2 = \frac{1}{30}$$

et

$$P_5(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{2^4 k^5 \pi^5}\ ,$$

par conséquent

$$|P_5(x)| < \frac{1}{2^4\pi^5}\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \dots\right) < \frac{1}{2^4\pi^5}\cdot\frac{5}{4}\ .$$

Ici

$$f(x) = \frac{a}{an+x} \qquad \text{et} \qquad m = a\ ,$$

[1] L. BIEBERBACH. *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Teubner, 1921, t. 1, p. 301.

nous pouvons donc écrire

$$\sum_{0}^{a} \frac{a}{an+x} = a \log \frac{n+1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{1}{a}$$

$$- \frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4}\right)\frac{1}{a^3} + 5\,!\, a \int_0^a \frac{\mathrm{P}_5(x)}{(an+x)^6}\, dx \; .$$

Or

$$\left| 5\, a \int_0^a \frac{\mathrm{P}_5(x)}{(an+x)^6}\, dx \right| < 0{,}0062 \left(\frac{1}{n^5} - \frac{1}{(n+1)^5}\right)\frac{1}{a^4} \; .$$

Par conséquent

$$\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} > \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{2}{a}\right)$$

$$- \frac{1}{120}\left(\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4}\right)\left(\frac{1}{(a-1)^3} + \frac{1}{(a+1)^3} - \frac{2}{a^3}\right)$$

$$- 0{,}0062 \left(\frac{1}{n^5} - \frac{1}{(n+1)^5}\right)\left(\frac{1}{(a-1)^4} + \frac{1}{(a+1)^4} + \frac{2}{a^4}\right)$$

et comme pour $n \geqq 2$

$$\frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4} = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

et

$$\frac{1}{n^5} - \frac{1}{(n+1)^5} < \frac{1}{n^4} - \frac{1}{(n+1)^4} \, ,$$

il suffit de montrer que

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{2}{a} - \frac{1}{20}\left(\frac{1}{(a-1)^3} + \frac{1}{(a+1)^3} - \frac{2}{a^3}\right) \tag{2}$$

$$- 0{,}0372 \left(\frac{1}{(a-1)^4} + \frac{1}{(a+1)^4} + \frac{2}{a^4}\right) > 0 \; .$$

Or

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{2}{a} = \frac{2}{a(a^2-1)} \, ,$$

$$\frac{1}{(a-1)^3} + \frac{1}{(a+1)^3} - \frac{2}{a^3} < \frac{1}{(a-1)^3} - \frac{1}{(a+1)^3} = \frac{6\,a^2+2}{(a^2-1)^3} \, ,$$

$$\frac{1}{(a-1)^4} + \frac{1}{(a+1)^4} + \frac{2}{a^4} < \frac{4}{(a-1)^4} \; .$$

Il suffit donc, en multipliant le premier membre de (2) par $\frac{a(a^2-1)}{2}$, de montrer que

$$1 - \frac{1}{20}\,\frac{3a^3+a}{(a^2-1)^2} - 0{,}075\,\frac{a^2+a}{(a-1)^3} > 0 \ . \tag{3}$$

Or $\frac{3a^3+a}{(a^2-1)^2}$ et $\frac{a^2+a}{(a-1)^3}$ sont deux fonctions décroissantes de a et l'inégalité (3) est vérifiée pour $a = 2$. Donc $\frac{\varphi'(n)}{\varphi(n)} > 0$, pour $a \geqq 2$ et $n \geqq 2$, et le lemme est établi.

Corollaire. — La fonction $\varphi(n)$ vérifie l'inégalité

$$\frac{b+1}{a} \leq \varphi(n) < \frac{(a-1)^{a-1}(b+1)^{b+1}}{a^a\, b^b} \ . \tag{4}$$

En effet

$$\varphi(0) = \frac{b+1}{a} \qquad \text{et} \qquad \lim_{(n\to\infty)} \varphi(n) = \frac{(a-1)^{a-1}(b+1)^{b+1}}{a^a\, b^b} \ .$$

L'inégalité (4) est encore vérifiée, lorsque $a = 1$, pourvu qu'on remplace $(a-1)^{a-1}$ par $1 = \lim\limits_{(a\to 1)} (a-1)^{a-1}$.

3. — *Démonstration de la seconde partie du théorème de Cournot.*

Supposons, pour fixer les idées, $p \leqq q$.

Il s'agit d'établir les inégalités suivantes

$$\text{Si} \quad \frac{a}{b} \leqq \frac{p}{q} \ , \qquad \varphi(n)\,\frac{p}{q} > 1 \ , \tag{5}$$

$$\text{Si} \quad \frac{p}{q} \leqq \frac{a-1}{b+1} \ , \qquad \varphi(n)\,\frac{p}{q} < 1 \ . \tag{6}$$

Supposons d'abord $p = q$ (pile ou face).

Alors, en vertu de (4), l'inégalité $\frac{a}{b} \leqq 1$ entraîne

$$\varphi(n) \geqq \frac{b+1}{a} > 1 \ .$$

Pour des raisons de symétrie, l'inégalité $1 \leqq \frac{a-1}{b+1}$ entraîne $\varphi(n) < 1$.

Supposons maintenant $p < q$.

Il y a trois cas à distinguer:

Premier cas. $\frac{a}{b} \leqq \frac{p}{q}$.

Comme

$$\varphi(n) \geqq \frac{b+1}{a},$$

il vient

$$\varphi(n)\frac{p}{q} \geqq \frac{b+1}{a} \cdot \frac{a}{b} > 1 .$$

Deuxième cas. $\frac{p}{q} \leqq \frac{a-1}{b+1}$, mais $\frac{a}{b} > 1$.

Si $\frac{a-1}{b+1} \geqq 1$, $\varphi(n)$ est, comme nous l'avons déjà vu, inférieur à 1, donc *a fortiori* $\varphi(n)\,\frac{p}{q} < 1$. Mais il peut arriver que $\frac{a-1}{b+1} < 1$, alors $\varphi(n) = 1$ et par conséquent on a encore $\varphi(n)\frac{p}{q} < 1$.

Troisième cas. $\frac{p}{q} \leqq \frac{a-1}{b+1}$, mais $\frac{a}{b} \leqq 1$.

Comme

$$\varphi(n) < \frac{(a-1)^{a-1}(b+1)^{b+1}}{a^a\, b^b},$$

il suffit de montrer que

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^a \left(\frac{b+1}{b}\right)^b < 1 .$$

Or $\left(\frac{a-1}{a}\right)^a$ est une fonction croissante de a et

$$\lim_{(a \to \infty)} \left(\frac{a-1}{a}\right)^a = \frac{1}{e} .$$

De même $\left(\frac{b+1}{b}\right)^b$ est une fonction croissante de b et

$$\lim_{(b \to \infty)} \left(\frac{b+1}{b}\right)^b = e .$$

Donc

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^a \left(\frac{b+1}{b}\right)^b < \frac{1}{e} \cdot e = 1 .$$

et la seconde partie du théorème de Cournot est démontrée.

Je n'ai pas réussi à l'établir arithmétiquement.