H. Bateman. — Partial differential Equations of Mathematical Physies. — Un volume relié gr. in-8° (26 x 17) de XXII-522 pages. Prix: 42 s. net. At the University Press, Cambridge, 1932.

assurent quelque conservation totale ou partielle. Pour l'instant — et ceci est déjà plus que joli — les concepts qui s'associent aisément aux points d'accumulation sont le *contingent* et le *paratingent*. Je rappelle, avec M. Cartan, qu'en un point A d'une ligne ordinaire le contingent contient les limites des sécantes AM et que le paratingent contient les limites des sécantes MM', lorsque M et M' tendent vers A. Quant aux groupes qui conservent de telles configurations on pourra, par exemple, dans le cas de trois variables, les représenter par

$$X = f(x, y, z) , \quad Y = g(x, y, z) , \quad Z = h(x, y, z) ,$$

ces fonctions ayant des dérivées partielles du premier ordre continues et un jacobien non nul. Si l'on écrit

$$\xi = \varphi(X, Y, Z) , \quad \eta = \psi(X, Y, Z) , \quad \zeta = \varpi(X, Y, Z) ,$$

ces nouvelles fonctions auront encore des dérivées du premier ordre et c'est cela qui est la propriété groupale essentielle. On voit la largeur des hypothèses qui président à l'élaboration de la nouvelle géométrie. Il me vient même une idée que je donne ici, en passant, pour ce qu'elle vaut. L'existence des dérivées partielles du premier ordre pour les fonctions X, Y, Z ou ξ, η, ζ entraîne l'existence de déterminants fonctionnels qui assurent l'existence d'intégrales multiples et de transformations y afférentes. Dans ces conditions la G.I.D. (géométrie infinitésimale directe) pourrait avoir une origine intégrale et aurait alors un degré de généralité analogue à celui des considérations ensemblistes adjointes par M. Henri Lebesgue à la notion même d'intégrale. Il me semble d'ailleurs que, pour des raisons diverses, ceci est aussi l'opinion que M. Bouligand laisse transparaître en plusieurs endroits de son beau livre.

Quoiqu'il en soit, je n'ai indiqué jusqu'ici que quelques idées absolument essentielles. Que dire de nombreux développements tous plus intéressants les uns que les autres. D'abord le sympathique auteur ne suppose aucune connaissance préliminaire de la Théorie des ensembles. Il la reprend au début et d'une manière particulièrement intuitive puisqu'il a l'intention d'aboutir à des considérations géométriques tangibles. Quelle belle occasion de se familiariser avec le lemme de Borel-Lebesgue et les fonctions semi-continues de René Baire, avec la notion de distance de deux ensembles, avec la construction de Cantor-Minkowski et tant d'autres choses encore.

Des exercices, des sujets d'étude terminent le volume. Je crois bien que tout cela ne tardera pas à porter des fruits abondants et savoureux.

A. Buhl (Toulouse).

H. Bateman. — **Partial differential Equations of Mathematical Physics.** — Un volume relié gr. in-8° (26 × 17) de XXII-522 pages. Prix: 42 *s.* net. At the University Press, Cambridge, 1932.

Magnifique volume consacré surtout aux propriétés exactes des Equations aux dérivées partielles de la Physique mathématique. Le point de vue n'est cependant pas exclusif, l'auteur ne s'étant nullement interdit de montrer les contacts de l'exact et de l'approximatif, contacts devenus particulièrement intéressants, dans ces dernières années, avec des travaux, tels ceux de M. Nicolas Kryloff, sur lesquels il nous faudra précisément revenir ci-après.

Ce qui caractérise surtout le présent livre c'est l'uniformité des procédés variationnels, uniformité qui permet de tirer toutes les équations en litige de la considération d'une divergence. Les discussions les plus savantes, dans cet ordre d'idées, sont vraisemblablement celles de M. Th. De Donder; si elles ne sont reprises ici que d'une manière formelle et essentielle, ceci suffit, du moins, à en faire ressortir toute l'importance.

L'orthogonalisation suivant Ritz, qui devait inspirer M. Kryloff, conduit aussi à l'orthogonalisation, à éléments imaginaires conjugués, si précieuse, en Mécanique quantique, là où les considérations métriques ordinaires doivent céder le pas devant celles d'une géométrie unitaire dépendant des formes de Charles Hermite dites à indéterminées conjuguées.

Ces préliminaires posés, l'exposé débute avec les équations classiques les plus simples, telles $y'' = f(x)$, sur les solutions desquelles il faut reconnaître l'influence de conditions aux limites. C'est l'occasion de construire les développements de Fourier avec les méthodes de sommation de Cesàro-Fejér. Les oscillations libres et contraintes sont habilement combinées avec toute une analyse lagrangienne; une autre analyse symbolique, à opérateurs différentiels, lie les équations de Laplace, de D'Alembert, de Schrödinger avec les équations des théories élastiques et électromagnétiques, ces dernières conservant, probablement pour toujours, le cadre où le prodigieux génie de Maxwell sût les faire naître. A vrai dire, le cadre peut s'élargir, mais c'est toujours le même type de cadre.

Dans un second chapitre, il s'agit des théorèmes intégraux de Green et de Stokes. On sait que ces théorèmes, relatifs à des invariances, ont cependant le même pouvoir créateur que les méthodes variationnelles. On pourrait n'employer qu'eux; mieux vaut, sans doute, être éclectique et créer par deux grandes méthodes plutôt que par une seule.

La propagation de la chaleur conduit à des questions connexes sur l'humidification du bois et l'échauffement d'un corps poreux par un fluide à température plus élevée. Mais, où les méthodes à la Green triomphent, c'est surtout avec les équations des types elliptique, parabolique ou hyperbolique, équations tant illustrées par Riemann, par Darboux et, plus récemment par MM. Emile Picard, J. Hadamard, S. Bernstein, L. Lichtenstein et nombre d'autres grands géomètres. Il faut signaler aussi l'emploi du principe variationnel qui fait passer, par exemple, de formes aux dérivées partielles quadratiques du premier ordre à des formes linéaires du second ordre. C'est ainsi que l'on passe de la propagation d'un front d'onde à la propagation dalembertienne. Les équations élastiques et électromagnétiques étant reprises au clair des méthodes stokiennes, on parvient ainsi à la fin du chapitre second et à la page 203 du beau livre. C'est dire que les dix chapitres suivants seront beaucoup plus courts que les deux premiers. Néanmoins nous devons abandonner, faute de place, tout procédé d'analyse tant soit peu continu. Contentons nous de signaler des joyaux particulièrement brillants.

Ainsi, dans le Chapitre III, nous trouvons une théorie des ondes électromagnétiques dans les cristaux, théorie ou peuvent intervenir la série de Fourier, les résidus, les fonctions thêta, la fonction ζ de Riemann et, chemin faisant, une relation limite liant π et e dans le domaine réel.

Le Chapitre IV, sur la représentation conforme, traite notamment de la représentation des profils d'aile. On y trouve aussi les potentiels orthogonaux de Daniell, issus de remarquables symétries de déterminants.

Les équations à trois variables (Ch. V) utilisent surtout les solutions exponentielles à la Cauchy et les intégrales définies y attachées. L'emploi des coordonnées polaires (Ch. VI) introduit les fonctions sphériques et nombre d'opérateurs de dérivation nouveaux, tels celui de Hobson. Des fonctions d'onde homogènes conduisent, avec Stieltjes, à une équation *harmonique* étudiée par Euler et Poisson.

Les coordonnées cylindriques ou semi-polaires (Ch. VII), ellipsoïdales (Ch. VIII), paraboloïdales (Ch. IX), toroïdales (Ch. X) conduisent à un large usage d'intégrales définies des plus élégantes, de fonctions Γ et de toutes les transcendantes dont le prototype est la série hypergéométrique.

Le problème de la diffraction d'ondes planes (Ch. XI), par une arête parallèle aux fronts ou aux surfaces de phase constante, relève encore, d'après les travaux de Sommerfeld, de méthodes analytiques exactes. Et si les équations non linéaires (Ch. XII) sont des moins maniables, elles ne sont pas cependant dépourvues de propriétés exactes pouvant être rattachées, par exemple, à celles de l'équation de Riccati. Les surfaces minima riches non seulement, en propriétés exactes mais en questions non résolues, telles l'éternel problème de Plateau, sont encore là pour inciter les chercheurs à la découverte profonde, difficile et cependant élégante.

En résumé l'ouvrage, ainsi trop brièvement parcouru, est au-dessus de tout éloge. Il s'imposait pour peindre surtout le domaine *exact* à une époque où des équations de toute première importance cependant, comme l'équation de Schrödinger, ne vont pas sans quelques compromis. Il faut sans doute faire sa part au vague accompagnant nécessairement les théories probabilitaires, aux domaines corpusculaires où, comme le dit M. Louis de Broglie, les phénomènes ne peuvent se décrire qu'à demi mais, avant d'en prendre complètement son parti, on pourrait, sans danger. conseiller d'ultimes méditations à tirer du beau livre de M. Bateman.

A. Buhl (Toulouse).

H. W. Turnbull and A. C. Aitken. — **An Introduction to the Theory of Canonical Matrices.** Un volume relié gr. in-8° de XIV-192 pages. Prix: 17s. 6d. net. Blackie & Son limited. London and Glascow, 1932.

« Ce livre contient une exposition systématique de la théorie générale des matrices, théorie dont l'intérêt a été récemment très stimulé du fait de son introduction, avec grand succès, par Heisenberg et Dirac en la mécanique des quanta. »

Ceci est la traduction d'une phrase lue sur une couverture volante adjointe au volume et ces quelques mots m'ont d'abord donné l'idée d'une théorie des matrices exposée, une fois de plus, en vue de fins appartenant à la Physique théorique. Or il n'en est rien. Heisenberg et Dirac sont à peine cités dans le livre même. Au contraire Cayley, Cauchy, Sylvester, Hermite y sont grandement à l'honneur.

Il est à peine besoin de dire que cet état de choses ne me paraît mériter rien d'autre qu'une très bienveillante approbation. Noyer les matrices dans les théories ondulatoires et quantiques serait aussi inadmissible que de noyer les espaces de Riemann dans les théories d'Einstein. Et puis les matrices sont de véritables joyaux déjà quelque peu anciens. Il serait souverainement injuste de croire que leurs innombrables propriétés, toutes plus esthétiques les unes que les autres, n'ont été mises en valeur que sur le terrain physique.