

# Réunion de Thoune, 7 août 1932.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

*Réunion de Thoune, 7 août 1932.*

La Société mathématique suisse a tenu sa séance ordinaire à Thoune, le 7 août 1932, lors de la session (113<sup>me</sup>) de la Société helvétique des Sciences naturelles, sous la présidence de M. le professeur G. JUVET (Lausanne). Au programme de la Société helvétique figurait une conférence de M. le professeur F. GONSETH (Zurich) intitulée « La vérité mathématique et la réalité ».

Malgré la proximité du Congrès international des Mathématiciens (Zurich, 4-12 septembre 1932), une vingtaine de membres ont pris part à la réunion de la Société mathématique. Au cours de la partie scientifique six communications ont été présentées.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à Altorf, en 1933.

1. — R. WAVRE (Genève). — *Fonctions harmoniques multiformes et fonctions de Green.* — Soient S une surface analytique à deux côtés distincts et  $\rho$  la densité analytique d'une couche répartie sur S. Le potentiel de simple couche

$$U = \int \frac{\rho}{r} dS$$

est prolongeable analytiquement au travers de S dans ce sens que le potentiel  $U_i$  du côté  $i$  se prolonge au travers de S et le potentiel  $U_e$  du côté  $e$  de même. Ils sont tous deux analytiques dans une région D qui contient à son intérieur tout point intérieur à S. Ces deux potentiels, égaux sur S, ne coïncident pas dans tout le domaine D, car l'on a

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dn_i} (U_i - U_e) .$$

Soient, alors,  $S'$  une portion de S,  $c$  sa frontière et  $S''$  la partie restante; puis  $U'$  et  $U''$  les potentiels correspondants. On a

$$U' + U'' = U_i \quad \text{du côté de } i \quad U' + U'' = U_e \quad \text{du côté de } e .$$

Envisageons le potentiel  $U'$  pris du côté  $i$  et posons

$$\Psi = U' = U_i - U'' .$$

Cette fonction est harmonique hors de  $S'$  et hors de  $S''$ . Elle ne peut admettre que le contour  $c$  de  $S'$  comme singularité dans  $D$ . Allons en un point du côté  $e$  en traversant  $S'$ , on aura à l'arrivée

$$\Psi = U_i - U'' = U_i - U_e + U' ,$$

puis retournons au point de départ en traversant  $S''$ . La fonction  $\Psi$  n'a pas cessé d'être harmonique le long de ce trajet et l'on trouve

$$\Psi^{\text{arrivée}} - \Psi^{\text{départ}} = U_i - U_e .$$

Cette dernière valeur représente la fonction période de la fonction  $\Psi$  pour un circuit fait autour de la ligne  $c$  qui est donc une ligne de ramification de  $\Psi$ . Cette dernière a une infinité de déterminations puisque l'on peut décrire un nombre quelconque de circuits autour de  $c$ ; la fonction période est indépendante de la forme de  $S'$  comme d'ailleurs de l'étendue de  $S$ . Elle est toujours nulle sur  $S$ , cela résulte de la continuité du potentiel de simple couche.

La densité en chaque point est égale à la dérivée normale de la fonction période. Envisageons maintenant différents cas particuliers:

1° Supposons que  $S$  soit une surface de niveau pour un potentiel  $U$  dû à une certaine distribution de matière à l'intérieur de  $S$  et posons

$$U' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{dU}{dn_i} dS' .$$

Le potentiel  $U_i$  est ici constant  $U_i = K$ . La fonction période est donc  $K - U$ . Le potentiel  $U'$  n'admet que les singularités de  $U$  dans les masses attirantes et la ligne  $c$  de ramification. Une charge électrique en équilibre à la surface d'un conducteur donnerait lieu à des remarques analogues. L'on retrouve ainsi les fonctions harmoniques multiformes que M. Vasilescu et moi-même avons mises en évidence au moyen du potentiel conducteur.

2° Supposons que le potentiel de simple couche prenne sur la surface fermée  $S$  les mêmes valeurs que l'inverse de la distance d'un point  $A$  quelconque à un point  $P$  de  $S$

$$\frac{1}{AP} = \int \frac{f(P')}{PP'} dS .$$

Considérons le second membre; si  $P$  est du même côté que  $A$  le potentiel n'est autre qu'une fonction harmonique  $\omega(A, P)$  prenant sur  $S$  les mêmes valeurs que  $\frac{1}{AP}$ . Si  $P$  est de l'autre côté, le potentiel

se réduit à  $\frac{1}{AP}$ . La fonction période est donc ici égale à la fonction de Green pour la surface S et relative à la région où se trouve A :

$$G(A, P) = \frac{1}{AP} = \omega(A, P).$$

En résumé, l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{PP'} \frac{d}{dn_i} G(A, P') dS'$$

considérée comme fonction de P représente une branche de fonction harmonique multiforme qui admet le contour de S' comme ligne de ramification avec la fonction de Green G(A, P) comme période. Les autres singularités sont le pôle A et celles de  $\omega(A, P)$ .

3° Si S est une sphère de rayon R et de centre O, la fonction de Green est

$$\frac{1}{AP} - \frac{R}{OA} \frac{1}{A'P}$$

où A' est le conjugué de A par rapport à la sphère. La fonction multiforme n'admet alors pas d'autre singularité que la ligne de ramification c et les deux pôles A et A' de la fonction période.

4° L'intégrale de Poisson

$$U(A) = \frac{R^2 - \overline{OA}^2}{4\pi R} \int f(P') \frac{1}{AP'^3} dS \tag{1}$$

fournit une fonction U(A) harmonique à l'intérieur de la sphère S, harmonique aussi à l'extérieur. La première de ces fonctions tend vers f lorsque A tend vers S par l'intérieur. La seconde vers -f quand A se rapproche de S par l'extérieur. Si la fonction f est analytique, U<sub>i</sub> et U<sub>e</sub> sont prolongeables au travers de S. En étendant l'intégrale précédente à une portion S' de la sphère S, la fonction U' obtenue est une branche de fonction harmonique multiforme dont la fonction période pour le contour c de S' est U<sub>i</sub> - U<sub>e</sub>. Cette dernière est égale à 2f sur S. Elle n'est pas identiquement nulle. Cela tient à ce que le second membre de (1) contient en fait un potentiel de double couche.

5° Enfin, si dans l'intégrale de Poisson étendue à S' l'on prend  $f(P') = \frac{1}{PP'}$ , les raisonnements précédents prouvent que la fonction

$$U'(A, P) = \frac{R^2 - \overline{OA}^2}{4\pi R} \int \frac{1}{PP'} \frac{1}{AP'^3} dS' \tag{2}$$

est une branche de fonction harmonique multiforme, admettant le



contour  $c$  de  $S'$  comme ligne de ramification. Lorsque  $c$ 'est le point  $P$  qui décrit un circuit entourant  $c$  la période est

$$\frac{1}{AP} - \frac{R}{OA} \frac{1}{A'P}$$

et si  $c$ 'est  $A$  qui décrit ce circuit, la période est

$$\frac{1}{AP} + \frac{R}{OA} \frac{1}{A'P}.$$

La fonction multiforme n'admet pas d'autre singularité que  $c$ , les pôles  $A$ ,  $P$  et les points conjugués. On sait que l'intégrale (2) prise sur la sphère totale est à la base de la méthode du balayage de Poincaré.

2. — G. DE RHAM (Lausanne). — *Sur les périodes des intégrales abéliennes* — On connaît les relations établies par Riemann entre les périodes des intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique. Ces relations découlent tout de suite du théorème suivant, qui semble être leur véritable fondement topologique: l'intégrale double, étendue à une surface fermée bilatère de genre  $p$ , du produit extérieur de deux éléments d'intégrales curvilignes régulières et remplissant la condition d'intégrabilité en tout point de la surface, est égale à une fonction bilinéaire des périodes de ces deux intégrales relativement aux  $2p$  cycles d'un système fondamental; cette fonction bilinéaire est à coefficients entiers, non dégénérée, et ne dépend que du système fondamental et non des intégrales envisagées. Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème général relatif à des intégrales d'ordre quelconque dans une variété à un nombre quelconque de dimensions <sup>1</sup>. En l'appliquant aux intégrales de première espèce attachées à une variété algébrique à plusieurs dimensions, on obtient immédiatement les résultats de M. Hodge <sup>2</sup>. L'application aux intégrales ayant des singularités présente une difficulté qui peut être aisément levée si l'on se borne aux intégrales de deuxième espèce (sans résidus).

3. — P. FINSLER (Zurich). — *Sur les fondements de la théorie des ensembles*. — Un système de fondements complets de la théorie des ensembles est condition nécessaire et suffisante pour établir un système de fondements complets de toutes les mathématiques, mais elle n'est

<sup>1</sup> Voir ma thèse (*Journal de math. pures et appl.*, 1931), § 27, et *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 4, p. 151.

<sup>2</sup> Voir les deux travaux de M. W. V. D. Hodge (*Journal of the London Math. Soc.*, October 1930, p. 283, et *Proceedings of the Nat. Academy of Sciences*, December 1931, Vol. 17, Number 12). Cf. aussi notre note aux *Commentarii Math. Helvetici*, Vol. 3, p. 151.

possible que si les antinomies sont réellement éclaircies. Une contradiction en soi ne pouvant se former que si l'on se contredit en fait, on n'a qu'à éviter ceci. Pour le système de tous les ensembles, fixé par les axiomes de la relation, de l'identité et de l'intégralité, on peut donner un exemple, donc il ne contient pas de contradiction. Pour le système partiel des ensembles sans cercle on a les théorèmes connus de la théorie des ensembles; les axiomes d'existence sont remplacés par des théorèmes d'existence. Surtout il s'ensuit l'existence de la suite des nombres, donc l'existence d'objets en nombre infini.

4. — G. JUVET (Lausanne). — *Les nombres de Clifford et le calcul vectoriel.* — On voudra bien se reporter pour la définition des nombres de Clifford à un article des *Comm. Math. Helv.* (vol. 2, p. 225-235). Ici je me borne au cas de  $n = 3$ . Les formules de l'algèbre vectorielle se déduisent des règles de multiplication des unités de Clifford; il n'est pas possible de les rappeler ici; elles sont d'ailleurs très semblables aux formules du calcul des quaternions.

Pour l'analyse vectorielle, il faut remarquer que l'opérateur

$$\nabla = \Gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \Gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \Gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

se définit intrinsèquement par la limite:

$$\nabla C \cdot \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int \int_S d\sigma C}{\tau} \tag{1}$$

où  $C$  est un nombre variable,  $\tau$  un volume limité par la surface  $S$ ; ses éléments sont représentés par le bivecteur  $d\sigma$  dont l'expression cliffordienne est  $dx_1 dx_2 \Gamma_1 \Gamma_2 + dx_2 dx_3 \Gamma_2 \Gamma_3 + dx_3 dx_1 \Gamma_3 \Gamma_1$  (forme à multiplication extérieure). On trouve alors la formule

$$\int \int \int_V \nabla C d\tau = \int \int_{\Sigma} d\sigma C$$

où  $\Sigma$  est une surface fermée limitant le volume  $V$ ,  $d\tau$  étant le trivecteur qui représente l'élément du volume. Cette identité exprime en particulier le théorème du gradient, celui du rotationnel et celui de la divergence (Ostrogradski). Soit  $\Sigma$  une surface limitée par une courbe fermée  $\Gamma$  et  $n$  le nombre de Clifford qui représente la normale unité à  $\Sigma$ , on tire de (1) par un calcul simple la formule

$$\int \int_{\Sigma} \left( \nabla n \cdot C - \frac{dC}{dn} \right) n d\sigma = \int_{\Gamma} dl \cdot C$$

$dl$  étant l'élément d'arc (en cliffordien) de  $\Gamma$ . Cette formule contient comme cas particulier celle de Stokes qui donne la circulation d'un vecteur le long de  $\Gamma$ , et celle qui donne l'intégrale analogue du produit vectoriel  $\vec{dl} \times \vec{v}$  [Cf. LAGALLY, *Vektorrechnung*, S. 142]. On trouvera dans un mémoire détaillé [*Bulletin de la Soc. neuchâteloise des Sc. nat.* 2<sup>me</sup> volume du Centenaire] la démonstration de ces formules, une extension de ces résultats et quelques applications.

5. — Alice ROTH (Zurich). — *Sur une extension du théorème d'approximation de Weierstrass au domaine complexe.* — Comme généralisation d'un lemme de M. Carleman (Sur un théorème de Weierstrass, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, Bd. 20 B) j'ai démontré le théorème suivant:

Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux ensembles de points du plan complexe fermés et bornés ayant un seul point commun  $z = z_0$ . Supposons de plus ces ensembles tels qu'ils puissent être séparés par deux courbes sans points multiples conduisant du point  $z = z_0$  à l'infini et ayant le point  $z = z_0$  comme seul point commun entre elles et avec les ensembles  $M_1$  et  $M_2$ . Etant donnés deux polynomes  $p_1(z)$  et  $p_2(z)$ , où  $p_1(z_0) = p_2(z_0)$ , et un nombre positif quelconque  $\varepsilon$ , il existe un polynome  $p(z)$  tel qu'on ait

$$\begin{aligned} |p_1(z) - p(z)| &< \varepsilon && \text{dans l'ensemble } M_1, \\ |p_2(z) - p(z)| &< \varepsilon && \text{dans l'ensemble } M_2. \end{aligned}$$

Pour la démonstration j'utilise les considérations de M. Carleman et j'y ramène le cas général en faisant usage de certaines représentations conformes élémentaires.

A l'aide de la proposition énoncée on peut démontrer d'une manière simple certaines parties de la généralisation du théorème d'approximation de Weierstrass trouvée par MM. Hartogs et Rosenthal (*Math. Annalen*, Bd. 100 u. 104) par une voie différente. Les théorèmes énoncés par M. Carleman qui concernent l'approximation d'une fonction continue sur certaines courbes allant à l'infini peuvent être généralisés un peu; il est par exemple superflu de supposer les courbes considérées rectifiables.

6. — J. GRIZE (Le Locle). — *Sur les corps algébriques et les quaternions complexes.* — Cette communication résume une thèse de doctorat présentée par l'auteur à l'Université de Neuchâtel<sup>1</sup>.

La première partie traite de l'arithmomie du corps algébrique  $K$  de degré  $2^n$ , corps dont les nombres s'expriment rationnellement à l'aide de  $n$  racines carrées:  $\sqrt{A_1}, \sqrt{A_2}, \dots, \sqrt{A_n}$ , où les  $A_\lambda$  sont des

<sup>1</sup> Sur les corps algébriques dont les nombres s'expriment rationnellement à l'aide de racines carrées et sur les quaternions complexes, par Jean Grize, licencié ès sciences mathématiques, 1932.

nombres entiers ordinaires dont aucun ne contient un facteur carré. L'auteur traite principalement dans cette première partie de la forme des entiers du corps  $K$ , de la base des entiers, du discriminant et de la forme fondamentale du corps, de la décomposition des idéaux, des unités du corps et du nombre de classes d'idéaux. Plusieurs démonstrations sont d'ailleurs faites pour le cas de  $n = 3$  seulement.

La seconde partie est consacrée à l'étude des quaternions dits complexes, c'est-à-dire des quaternions dont les coordonnées sont tirées d'un corps algébrique, en l'espèce le corps  $K$  étudié plus haut. Les quaternions complexes présentent avec les quaternions à coordonnées rationnelles de grandes analogies mais aussi de profondes différences. C'est ainsi que si  $A$  représente un quaternion complexe différent de zéro, le produit  $AB$  de  $A$  par un quaternion complexe  $B$  peut s'annuler sans que  $B$  soit nul.  $A$  est alors dit un *diviseur de zéro*.

L'auteur appelle *idéal de quaternions complexes* et représente par  $\mathfrak{A} \equiv id \{a\}$ , l'ensemble infini des quaternions complexes entiers dont les quatre coordonnées parcourent indépendamment les unes des autres tous les nombres de l'idéal  $a$  du corps  $K$  des coordonnées. Cette généralisation de la notion d'idéal a permis d'étendre au domaine des quaternions complexes celle d'indicateur d'Euler ainsi que le théorème de Fermat.

---

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

### A propos d'un article de MM. Barzin et Errera.

A propos de l'article de MM. Barzin et Errera dans le tome XXX de cette revue (p. 248) je voudrais faire les remarques suivantes: D'abord la dénomination «logique de Heyting» ne me paraît pas heureuse, toutes les idées fondamentales de cette logique provenant de M. Brouwer; je préférerais «logique intuitionniste» ou bien «logique non-aristotélicienne», ce dernier terme pouvant d'ailleurs aussi désigner les logiques purement formelles non conformes à la logique classique que quelques savants polonais ont construit en ces dernières années. Ensuite je signale aux lecteurs l'article intéressant de M. Kolmogoroff (*Math. Z.* 35, p. 58), où l'auteur donne une interprétation remarquable de mes formules comme constituant une logique des problèmes. Cette interprétation est indépendante des idées intuitionnistes; cependant, pour le mathématicien intuitionniste c'est seulement cette