II.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On a donc la formule

$$\operatorname{cotg} V = \frac{\frac{a}{k} - \cos \theta}{\sin \theta},$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{\sin V}{k} = \frac{\sin (V + \theta)}{a}. \tag{3}$$

Nous allons interpréter cette formule. Soit Q le point où la tangente en M à la courbe rencontre Ox. Dans le triangle OMQ nous avons

$$\frac{OQ}{\sin V} = \frac{OM}{\sin (V + \theta)}$$

et en tenant compte de la formule (3), nous avons

$$OQ = \frac{k}{a} OM. \tag{4}$$

Cette formule montre que les courbes représentées par l'équation (1) ont la propriété que *la distance du point* O, *au point ou la tangente en* M *rencontre l'axe* Ox, *est proportionnelle au rayon vecteur* OM.

Pour les paraboles de foyer O et d'axe Ox, on a OQ = OM. Les courbes représentées par l'équation (1) généralisent donc cette propriété de la parabole.

On démontre aisément que cette propriété est caractéristique pour les courbes représentées par l'équation (1).

II.

Cherchons maintenant le mouvement d'un point M *dont la projection de la vitesse sur la perpendiculaire au rayon vecteur* OM *est égale à une constante* k, *et dont le mouvement se fait suivant la loi des aires par rapport au point* P.

5. — En prenant la droite OP comme axe des x, et en désignant par c l'abscisse de P par rapport à l'origine O, les équations qui

déterminent le mouvement sont

$$r\frac{d\theta}{dt} = k \ , \qquad (x - c)\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \mathrm{C} \ ,$$

C étant la constante des aires.

L'équation différentielle de la trajectoire est

$$\frac{(x - c)\,dy - y\,dx}{r\,d\theta} = \frac{\mathrm{C}}{k} \ .$$

Mais

$$xdy - ydx = r^2 d\theta \ , \qquad dy = dr \, . \sin\theta + r\cos\theta\, d\theta \ .$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation différentielle, on trouve que r en fonction de θ, est donné par l'équation différentielle de Bernoulli

$$\frac{dr}{d\theta} + \frac{\lambda + c\cos\theta}{c\sin\theta} r - \frac{r^2}{c\sin\theta} = 0 \ , \tag{5}$$

où l'on a posé $\lambda = \frac{\mathrm{C}}{k}$.

En posant

$$\rho = \frac{1}{r} \ ,$$

on a l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$\frac{d\rho}{d\theta} - \frac{\lambda + c\cos\theta}{c\sin\theta}\rho = -\frac{1}{c\sin\theta} \ .$$

Une intégrale particulière de cette équation sans second membre est

$$\rho_2 = \sin\theta \ \mathrm{tg}^{\frac{\lambda}{c}} \frac{\theta}{2} \ .$$

De même, si on suppose $\lambda^2 \neq c^2$, on a pour l'équation différentielle avec second membre, l'intégrale particulière

$$\rho_1 = \frac{\lambda - c\cos\theta}{\lambda^2 - c^2} \ ,$$

de sorte que l'intégrale générale de l'équation différentielle (5) est

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda - c\cos\theta}{\lambda^2 - c^2} + \mathrm{A}\sin\theta\,\mathrm{tg}^{\frac{\lambda}{c}}\frac{\theta}{2}, \tag{6}$$

A étant une constante arbitraire.

Dans le cas $\lambda = c$, c'est-à-dire dans le cas $\mathrm{C} = kc$, on trouve sans peine que l'intégrale générale de l'équation différentielle (5) est

$$\frac{1}{r} = \mathrm{A}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2c} - \frac{1}{c}\sin^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{Lg}\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right), \tag{7}$$

où A est une constante arbitraire.

Dans le cas $\lambda = -c$, on trouve aussi que l'intégrale générale de l'équation différentielle (5) est

$$\frac{1}{r} = \mathrm{A}\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2c} - \frac{1}{c}\cos^2\frac{\theta}{2}\,\mathrm{Lg}\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\right) \tag{8}$$

avec la constante arbitraire A.

6. — Calculons maintenant l'accélération du point M. Remarquons d'abord que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r}\frac{dr}{d\theta},$$

et en remplaçant $\frac{dr}{d\theta}$ par son expression tirée de l'équation différentielle (5), on obtient

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{c\sin\theta}[r - (\lambda + c\cos\theta)]. \tag{9}$$

Si on dérive les formules

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

par rapport au temps, on déduit que les composantes de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{c}(r - \lambda)\cot\mathrm{g}\,\theta - \frac{k}{\sin\theta}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{k}{c}(r - \lambda).$$

En dérivant de nouveau ces formules par rapport au temps, et en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par $\frac{k}{r}$ et $\frac{dr}{dt}$ par la formule (9), on obtient les composantes de l'accélération

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k^2}{c\sin^2\theta}(r - \lambda - c\cos\theta)\left(\frac{\cos\theta}{c} - \frac{1}{r}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2}{c^2\sin\theta}(r - \lambda - c\cos\theta) .$$

Remarquons que

$$\frac{\cos\theta}{c} - \frac{1}{r} = \frac{x - c}{rc} , \qquad r\sin\theta = y ,$$

de sorte qu'on peut écrire les formules précédentes sous la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k^2}{c^2\sin^2\theta}(r - \lambda - c\cos\theta)\frac{x - c}{r}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{k^2}{c^2\sin^2\theta}(r - \lambda - c\cos\theta)\frac{y}{r}$$

ou encore

$$\vec{J} = \frac{k^2}{c^2\sin^2\theta}\left(1 - \frac{\lambda + c\cos\theta}{r}\right)\overrightarrow{PM} . \tag{10}$$

Si l'on remplace r par la formule (6) on a

$$1 - \frac{\lambda + c\cos\theta}{r} = -\frac{c^2\sin^2\theta}{\lambda^2 - c^2} - A(\lambda + c\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{tg}^{\frac{\lambda}{c}}\frac{\theta}{2} ,$$

et par suite

$$\vec{J} = -\frac{k^2}{\lambda^2 - c^2}\overrightarrow{PM} - Ak^2\frac{\lambda + c\cos\theta}{c^2\sin\theta}\,\mathrm{tg}^{\frac{\lambda}{c}}\frac{\theta}{2}\cdot\overrightarrow{PM} . \tag{11}$$

Remarquons que la formule (10) est générale, tandis que la formule (11) n'est valable que si $\lambda \neq \pm c$. Pour avoir des formules analogues pour $\vec{J}$, dans le cas $\lambda = \pm c$, il suffit de remplacer dans la formule (10), $\frac{1}{r}$ par la formule (7) ou (8).

7. — Etudions un cas particulier. Supposons dans la formule (6) que la constante d'intégration A est nulle. La trajectoire se réduit alors à la conique

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda - c\cos\theta}{\lambda^2 - c^2} ,$$

et la formule (11) montre que le point M décrit cette conique avec une accélération qui passe par le centre P de la conique et qui est proportionnelle à la distance PM.

On sait que si un point M décrit une conique avec une accélération passant par le centre de la conique et proportionnelle à la distance du point M au centre, la vitesse angulaire du point M autour d'un foyer de la conique est inversement proportionnelle à la distance du point au foyer.

Dans ce paragraphe nous avons étudié la réciproque de cette propriété et on voit combien les résultats obtenus sont généraux.

Les courbes décrites par un mobile M suivant la loi des aires et dont la vitesse angulaire autour d'un point O est inversement proportionnelle à la distance OM, sont représentées en général par l'équation (6). Seulement dans le cas $A = 0$, cette trajectoire est une conique et l'accélération est proportionnelle à la distance du point M au centre de la conique.

A ce point de vue, *on peut regarder les courbes représentées par l'équation* (6) *comme généralisant les coniques à centre.*

8. — Nous allons maintenant établir une propriété géométrique des courbes représentées par l'équation (6), qui montrera qu'on peut regarder ces courbes comme généralisant les coniques à centre, aussi à un autre point de vue.

On sait que si M est un point d'une conique à centre, O son foyer et T le point de rencontre de la tangente en M à la conique avec son grand axe, on a

$$\mathrm{OT} = \frac{cr}{a \pm r} \tag{12}$$

où r est le rayon vecteur OM, $2c$ la distance focale et $2a$ le grand axe.

Démontrons que les courbes représentées par l'équation (6) et aussi par les équations (7) et (8) jouissent d'une propriété analogue.

Désignons par V l'angle que fait la tangente en M à la courbe représentée par l'équation (6) et par Q son point de rencontre avec Ox. On a

$$\operatorname{cotg} \mathrm{V} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \,.$$

De l'équation différentielle (5) nous déduisons que

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{r - \lambda - c\cos\theta}{c\sin\theta}$$

de sorte qu'on a

$$\frac{\cos V}{\sin V} = \frac{r - \lambda - c\cos\theta}{c\sin\theta}$$

ou

$$(r - \lambda)\sin V = c\sin(V + \theta) .$$

Mais dans le triangle OMQ on a

$$\frac{OQ}{\sin V} = \frac{OM}{\sin(V + \theta)} = \frac{r}{\sin(V + \theta)}$$

et si nous remplaçons dans la formule précédente, $\sin V$ et $\sin(V + \theta)$ par OQ et r, nous obtenons la relation

$$OQ = \frac{cr}{r - \lambda} ,$$

tout à fait analogue à la relation (12).