

VII. Faisceaux isothermes.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Comme nous l'avons établi, les invariants de la forme ϖ_1 sont les invariants euclidiens (géodésiques) de l'équation $\varpi = 0$. Avec les notations

$$\frac{f_u}{f_v} = Q = e^{-2i\zeta} \quad \frac{W}{2} = e^w \quad (49')$$

on peut écrire une forme semi-normale

$$\varpi_1 = \frac{W}{2} \left(\sqrt{\frac{f_u}{f_v}} du + \sqrt{\frac{f_v}{f_u}} dv \right) = e^{w-i\zeta} du + e^{w+i\zeta} dv . \quad (96)$$

VII. FAISCEAUX ISOTHERMES.

22. Il est bien connu, dans la représentation conforme des surfaces, qu'à côté des deux faisceaux formés par les deux séries de lignes minima, $du = 0$ et $d\nu = 0$, les faisceaux isothermes de courbes sont aussi conservés; l'équation différentielle $\varpi = 0$ d'un tel faisceau du premier ordre est en effet caractérisée par la condition invariante

$$I = 0$$

et l'équation $\varpi = 0$ n'a alors aucun invariant conforme. Nous avons donné bien des formes à l'invariant I de ϖ ; considérons en particulier une forme semi-normale ϖ_1 sur un ds^2 et rappelons diverses interprétations de l'équation $I_1 = 0$. D'après

$$I_1 = \frac{i}{2} \Lambda \log Q = 0 \quad (97)$$

$$\frac{\partial^2 \log Q}{\partial u \partial \nu} = 0 \quad Q = \frac{A}{B} = \frac{a(u)}{b(\nu)}$$

le rapport $\frac{A}{B}$ des coefficients de l'équation $\varpi = 0$ est le quotient de deux fonctions arbitraires, l'une de u , l'autre de ν ; le facteur intégrant $\frac{a}{2A} = \frac{b}{2B}$ ramène alors à l'équation intégrable

$$\varpi_0 = \frac{1}{2} \{ a(u) du + b(\nu) d\nu \} = 0$$

et les courbes intégrales sont données par

$$f = \frac{1}{2} \{ U(u) du + V(\nu) d\nu \} = \text{const.} \quad U' = a, \quad V' = b,$$

les accents indiquant, pour les fonctions d'une seule variable, les dérivées par rapport à celle-ci; une transformation (3) donne alors à f une forme réduite $\bar{X} = \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v})$. L'on a en même temps

$$I_1 = \Lambda\varphi = 0 \quad (97')$$

$$\varphi = \frac{i}{2} \log Q = -\frac{i}{2} \left(\log \frac{1}{a} - \log \frac{1}{b} \right) = -\frac{i}{2} \{ \Phi(u) - \Psi(v) \}$$

donc la condition (97') exprime aussi que les courbes $\varphi = \text{const.}$ forment un faisceau isotherme, φ étant variable isothermique, et cette propriété est caractéristique; nous nous étions d'ailleurs ramené à des fonctions f pour lesquelles Λf ou Ωf est nul: c'est ce qu'exprime, à un changement de fonction f près, la forme suivante de l'équation invariante

$$I_1 = \Theta'(f, \Omega f) = 0 \quad \Omega f = F(f) \quad (98)$$

où F est une fonction arbitraire, qu'on peut choisir pour avoir $\Omega F = 0$. En revenant alors à la notation f pour la fonction choisie, et choisissant de même la fonction g pour que $\Omega g = 0$ puisqu'on a aussi

$$I_1 = \Theta'(g, \Omega g) = 0$$

il en résulte, d'après (91), $\nabla \log q = 0$, et l'on peut par suite prendre

$$q = 1 \quad x = y \quad p = x^2 \\ ds^2 = W^2(dX^2 + dY^2) = x^2(df^2 + dg^2).$$

On a encore

$$D_1 = \mathcal{O}_1 \log x \quad T_1 = \mathcal{C}_1 \log x \\ \mathbf{g}_1 = -\nabla \log W + J\nabla\varphi = -\nabla \log x$$

toutes formules qui sont bien d'accord avec

$$I_1 = \text{rot } \mathbf{g}_1 = -(\mathcal{O}_1 \mathcal{C}_1) \log x = 0$$

et les formes particulières que prennent alors les formules déjà établies.

23. En résumé, ce qui caractérise un faisceau isotherme, c'est d'être associé à un faisceau également isotherme de trajectoires orthogonales, et plus généralement d'être incorporé dans un réseau angulaire isotherme, toutes les courbes d'un tel réseau pouvant être représentées par des intégrales $f = \text{const.}$, $g = \text{const.}$, etc. pourvues en un même point \mathbf{m} de vecteurs gradients de même module $\frac{1}{x}$; ces gradients forment en tout point de la surface une *simili-étoile*, se ramenant

à celle attachée à un autre réseau angulaire isotherme $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$, etc. par une similitude dont l'angle et le rapport sont liés par la relation

$$\nabla \log \frac{W}{x} = J \nabla \varphi$$

de sorte que φ et $\log \frac{W}{x}$ sont deux solutions conjuguées de l'équation $\Delta z = 0$. C'est par le choix de ces solutions que se différencient les divers réseaux angulaires isothermes constituant l'ensemble des faisceaux isothermes de la surface — brièvement *l'ensemble isotherme*.

Si l'on suppose aussi qu'on effectue, en chaque point \mathbf{m} , un changement de l'étalon de longueur, de sorte que la simili-étoile de repère du réseau isotherme considéré devienne une étoile de vecteurs unitaires, ceci revient à une représentation sur le $d\sigma_0^2$ canonique de ϖ_0

$$d\sigma_0^2 = df^2 + dg^2 = dU dV$$

et, selon qu'on opérera sur un étalon de longueur ou l'autre, on considérera les repères et simili-repères attachés à ds^2 et $d\sigma_0^2$ comme de modules 1 et $\frac{1}{x}$, ou x et 1.

VIII. FAISCEAUX NON ISOTHERMES.

24. Soit l'équation $\varpi = 0$ d'un faisceau non isotherme; par le moyen d'un facteur normant $\varpi^* = \sqrt{I}$, on donnera au premier membre de l'équation la forme *normale*

$$\varpi^* = \sqrt{I} \varpi \tag{99}$$

dont les invariants seront ceux de l'équation $\varpi = 0$; en particulier, si on part des formes $\varpi_0 = df$, ou ϖ_1 , on aura

$$\varpi^* = \sqrt{\frac{\Theta'(f, \Omega f)}{\Delta f}} df = \sqrt{\Theta'(f, \Omega f)} \varpi_1 .$$

Il résulte de la première formule (36) que la forme normale ϖ^* est caractérisée par son invariant I^* ramené à l'unité

$$I^* = 1$$

cependant qu'en général les ordres des opérateurs et des invariants (dont les symboles portent des astérisques) sont majorés de deux unités par rapport à ceux qui leur correspondent pour une forme ϖ