I. Notations — Préliminaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

des congruences de normales attachées aux points d'une surface (je ne dis pas les normales de la surface).

Il est connu que les *réseaux cerclés* de courbes d'une surface se transforment les uns dans les autres par les représentations conformes de la surface: nous nous contentons de quelques indications sur cette théorie récente.

X. Comme nous l'avons fait dans notre première Etude, nous montrons comment les invariants et opérateurs des formes et équations quadratiques se rattachent à ceux de formes et d'équations linéaires; au double faisceau de courbes défini par une équation quadratique, on doit, au point de vue géométrique, joindre d'abord la considération des faisceaux bissecteurs et du faisceau formé par les courbes le long desquelles l'angle 2ω du faisceau initial est constant. Ici encore, on retrouve des formes normales et un $d^*\sigma^2$ canonique. Pour l'isothermie, on peut considérer une *hémi-isothermie* et une *holo-isothermie*.

XI. Nous sommes maintenant en présence de deux faisceaux du 2^{me} ordre, celui des lignes minima et le faisceau $\alpha^{(2)} = 0$ à conserver; pour les formes correspondantes $ds^2 = W^2\,du\,dv$ et $\alpha^{(2)} = C^2 d\xi d\eta$, il est intéressant de montrer les relations entre les invariants calculés à partir des changements de variables portant soit sur u, v, soit sur ξ, η. Cette symétrie du problème a déjà été préparée dans les numéros précédents: elle prépare son extension à des questions analogues, où ne figureraient plus nécessairement les lignes minima.

Les méthodes exposées peuvent aussi se prolonger pour l'étude de formes et d'équations différentielles de degré supérieur.

I. Notations — Préliminaires.

1. Le ds^2 d'une surface étant pris sous la forme

$$ds^2 = W^2 du\,dv = W^2(dX^2 + dY^2) \tag{1}$$

les paramètres u, v sont ceux des lignes minima de la surface, et les variables X, Y telles que

$$\left\{ \begin{aligned} u &= X + iY \\ v &= X - iY \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(u+v) \\ Y &= -\frac{i}{2}(u-v) \end{aligned} \right. \tag{2}$$

sont des paramètres isothermiques (ou isométriques). Un changement de variables

$$\bar{u} = U(u) \qquad \bar{v} = V(v) \tag{3}$$

réalise une représentation conforme (directe) de la surface, autrement dit une transformation conforme *superficielle*; de telles transformations constituent une application importante de la théorie des transformations à variables séparées, dont nous avons commencé l'étude dans un précédent Mémoire *(Equivalences)*.

Nous considérons en général des variables X, Y réelles, donc des variables u, v imaginaires conjuguées (coordonnées symétriques); pour les courbes réelles tracées sur une surface réelle, ou du moins celles données, avec des variables réelles, par des équations à coefficients réels, il y a lieu de modifier les notations et les résultats déjà acquis pour mettre en évidence, autant que possible, des invariants réels. Nous sommes ainsi amené à faire usage des paramètres différentiels de la théorie des surfaces.

D'autre part, il est parfois préférable d'établir entre les variables, $\bar{u}$, $\bar{v}$, X, iY des relations plus symétriques que celles des formules (2), soit

$$\left\{\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY) \\ \bar{v} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY) \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} + \bar{v}) \\ iY &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u} - \bar{v})\ . \end{aligned}\right. \tag{2'}$$

Pour ne pas charger les formules de coefficients ε auxquels on pourrait donner ensuite, suivant les cas, les valeurs 1 ou $\sqrt{2}$, nous en resterons aux notations (2), en remarquant qu'on passerait aux formules (2′) par la transformation

$$\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{2}} \qquad \bar{v} = \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{3'}$$

ne modifiant pas les invariants que nous allons calculer, et introduisant pour les comitants (covariants, contrevariants, etc.) des changements simples.

2. Les dérivées partielles par rapport à des variables u, v, X, Y, f, g, seront indiquées par des indices inférieurs, par exemple

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v}, \qquad f_X = \frac{\partial f}{\partial X}, \qquad z_{fg} = \frac{\partial^2 z}{\partial f\, \partial g}, \qquad \text{etc.}$$

et nous écrirons sous les formes suivantes les principaux paramètres différentiels employés [1]

$$\Delta f = \frac{4f_u f_v}{W^2} \qquad \Delta'(f,\, z) = \frac{2(f_u z_v + f_v z_u)}{W^2} \qquad \Theta'(f,\, z) = \frac{-2i(f_u z_v - f_v z_u)}{W^2} \tag{4}$$

paramètres du 1^er^ ordre, donnant la relation connue

$$\overline{\Delta'(f,\, z)}^2 + \overline{\Theta'(f,\, z)}^2 = \Delta f . \Delta z \,. \tag{5}$$

Les paramètres du 2^e^ ordre d'une fonction f sont ensuite

$$\Lambda f = \frac{4f_{uv}}{W^2} \qquad \Delta^2 f = \Delta\Delta f \qquad \Delta'' f = \Delta'(f,\, \Delta f) \qquad \Theta'' f = \Theta'(f,\, \Delta f) \tag{6}$$

liés par la relation

$$\overline{\Delta'' f}^2 + \overline{\Theta'' f}^2 = \Delta f . \Delta^2 f \,. \tag{7}$$

On a d'ailleurs, dans le cas $W^2 = 1$, pour les numérateurs de certaines des expressions précédentes

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta_0 f = 4f_u f_v = f_X^2 + f_Y^2 \qquad \Lambda_0 f = 4f_{uv} = f_{X^2} + f_{Y^2} \\ &\Delta'_0(f,\, z) = 2(f_u z_v + f_v z_u) = f_X z_X + f_Y z_Y \\ &\Theta'_0(f,\, z) = -2i(f_u z_v - f_v z_u) = f_X z_Y - f_Y z_X = -2i\frac{D(f,\, z)}{D(u,\, v)} = \frac{D(f,\, z)}{D(X,\, Y)} \end{aligned}\right. \tag{8}$$

formules qui permettent le développement des calculs et leur vérification, pour les expressions indépendantes de W^2 obtenues dans la géométrie de la représentation conforme.

A côté des expressions précédentes, citons encore les suivantes, également entières par rapport aux dérivées partielles des fonctions auxquelles elles se rapportent

$$\Gamma f = \Delta'' f - 2\Delta f . \Lambda f \qquad \Sigma f = \frac{\Delta^2 f - 2\Delta'' f . \Lambda f}{4\Delta f} \tag{9}$$

et, pour $W^2 = 1$, les développements

$$\left\{\begin{aligned} &\Theta''_0 f = -8i(f_{u^2} f_v^2 - f_{v^2} f_u^2) \qquad \Gamma_0 f = 8(f_{u^2} f_v^2 + f_{v^2} f_u^2 - 2f_{uv} f_u f_v) \\ &\qquad\qquad \Sigma_0 f = 2i\Theta'_0(f_u,\, f_v) = -\Theta'_0(f_X,\, f_Y) \,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

---

[1] A nos notations Δf, $\Delta'(f, z)$, $\Theta'(f, z)$, Λf, Σf correspondent les notations de Darboux Δf, $\Delta(f, z)$, $\Theta(f, z)$, $\Delta_2 f$, $\sigma(f)$ ce dernier paramètre étant écrit $-\Delta_{22} f$ par L. Bianchi.

En introduisant une fonction g telle que

$$\begin{cases} g_X = -\, q f_Y \\ g_Y = \quad q f_X \end{cases} \qquad \begin{cases} g_u = -\, i q f_u \\ g_v = \quad i q f_v \end{cases} \tag{11}$$

la fonction q est astreinte à vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta f + \Delta'(f, \log q) = 0 \tag{12}$$

et l'on a, entre autres relations

$$\Theta'' g = q^3 \Gamma f \, . \tag{13}$$

Nous introduirons, chemin faisant, les expressions utiles pour la géométrie conforme, c'est-à-dire *la géométrie de la représentation conforme*, que nous désignerons dans la suite sous ce nom.

3. Sans développer ici les méthodes de calcul géométrique (calcul vectoriel), nous rappellerons que si la surface considérée est décrite par le point variable **m**, de masse unité, fonction des variables u, v ou X, Y, une fonction géométrique (scalaire ou vectorielle) de ce point donne naissance aux fonctions dérivées *superficielles*

$$\nabla \Phi = \frac{d\Phi}{d\mathbf{m}} \qquad \nabla^2 \Phi = \frac{d^2\Phi}{d\mathbf{m}^2} \qquad \text{etc.}$$

Pour des vecteurs **a**, **b**, de la surface (à ds^2 donné), on peut considérer les produit et carré *intérieurs* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\overset{2}{\mathbf{a}}\times$, le produit *extérieur* $[\mathbf{ab}]$; les relations entre les produits intérieur et extérieur sont mises en évidence au moyen du verseur J, produisant la rotation directe d'un angle droit du vecteur qui lui est soumis.

Pour l'exploration de la surface au moyen d'un *repère* associé au point **m**, et formé avec deux vecteurs *unitaires* **d** et $\mathbf{t} = \mathrm{J}\mathbf{d}$, considérons le cas où le vecteur **d** a la direction et le sens du gradient ∇f d'une fonction scalaire f [1]; alors

$$\begin{cases} \nabla f = \sqrt{\Delta f} \, . \, \mathbf{d} = \dfrac{df}{ds_d} \, . \, \mathbf{d} & \\ \Delta'(f, z) = \nabla f \times \nabla z & \text{produit intérieur de gradients} \\ \Theta'(f, z) = [\nabla f \, . \, \nabla z] & \text{produit extérieur de gradients} \\ \Delta f = \operatorname{div} \nabla f & \text{divergence de gradient.} \end{cases} \tag{14}$$

[1] Si **d** a le sens opposé de Δf, la détermination du radical $\sqrt{\Delta f}$ est à changer.

Dans le cas où l'on considère deux vecteurs **a** et $\mathbf{b} = \mathrm{J}\mathbf{a}$ d'un *simili-repère*, on a d'ailleurs (les rotationnels étant *superficiels*)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b} \qquad \operatorname{div} \mathbf{b} = - \operatorname{rot} \mathbf{a} \ , \tag{15}$$

et pour un gradient ∇f on a toujours la condition d'intégrabilité

$$\operatorname{rot} \nabla f = 0 \ . \tag{16}$$

On connaît d'autre part *(Thèse)* les relations entre les notations vectorielles: produit extérieur de vecteurs, rotationnel — et celles introduites par M. E. Cartan pour les formes de Pfaff: produit extérieur, différentiation extérieure; elles tiennent essentiellement aux formules

$$\left\{ \begin{array}{l} df = \nabla f \times d\mathbf{m} \\ \varpi = \mathbf{a} \times d\mathbf{m} = x df \qquad \mathbf{a} = x \nabla f \ . \end{array} \right. \tag{17}$$

Aux formules (11) correspond, en calcul vectoriel

$$\nabla g = q \mathrm{J} \nabla f \tag{11'}$$

et (12) s'en déduit en prenant les rotationnels des deux membres.

II. Invariants et opérateurs différentiels d'une forme de Pfaff.

4. Nous dirons que les courbes intégrales d'une équation de Pfaff $\varpi = o$ forment sur la surface un faisceau (simple); la donnée d'une fonction f de u, v (ou de la variable géométrique **m**) est équivalente à celle des intégrales $f =$ const., prises *individuellement*, de l'équation $df = 0$; au contraire, la donnée d'une équation de Pfaff $\varpi = x df = 0$, revient seulement à celle de *l'ensemble* des courbes intégrales du faisceau.

Soit à conserver, par les transformations conformes (3), une forme de Pfaff

$$\varpi = \mathrm{A}(u, v) du + \mathrm{B}(u, v) dv \tag{18}$$

à laquelle nous avons attaché deux opérateurs différentiels du 1er ordre, ϑ_u et ϑ_v, donnant d'une fonction z les paramètres différentiels

$$\vartheta_u z = \frac{z_u}{\mathrm{A}} \qquad \vartheta_v z = \frac{z_v}{\mathrm{B}} \ . \tag{19}$$