géométrie des triplets.

Le premier ellipsoïde appartient au faisceau ponctuel de quadriques défini par l'ellipsoïde E *et la première sphère des douze points.*

La connaissance de H entraîne celle du tétraèdre.

Le centre O de la sphère circonscrite, le centre O′ de la deuxième sphère des douze points et le point H′ inverse de H par rapport au tétraèdre (H′ est le point qui se projette sur chaque face en son centre de gravité) décrivent respectivement des biquadratiques homothétiques à celui qui est le lieu de l'orthocentre H.

Posons $a^2 + b^2 + c^2 = 9\omega^2$ (constante).

La sphère circonscrite est orthogonale à une sphère fixe de centre G et de rayon $i\omega\sqrt{3}$.

La deuxième sphère des douze points est orthogonale à une sphère fixe de centre G, de rayon $i\frac{\sqrt{3}}{3}\omega$.

On a les relations suivantes:

$$\overline{HG}^2 = \rho^2 + \omega^2 , \qquad \overline{OH}^2 = R^2 + 3\rho^2 ,$$

$$\overline{OG}^2 = R^2 - 3\omega^2 , \qquad \overline{O'G}^2 = \frac{1}{9}(R^2 - 3\omega^2) ,$$

$$R^2 = \rho^2 + 4\omega^2 .$$

Les hauteurs du tétraèdre orthocentrique sont normales à l'ellipsoïde circonscrit E *aux quatre sommets du tétraèdre.*

Les arêtes des tétraèdres orthocentriques T *sont les droites du complexe tétraédral d'équation*

$$a^2 p_1 p_4 + b^2 p_2 p_5 + c^2 p_3 p_6 = 0 ,$$

en coordonnées plückériennes p_i *de droites.* Les arêtes appartiennent ainsi à la congruence commune à ce complexe tétraédral et au complexe spécial attaché à la quadrique E″.

Les milieux des arêtes (points de contact de celles-ci avec l'ellipsoïde E″) sont situés sur une biquadratique gauche définie par E″ et par la première sphère des douze points.

Si L est le milieu d'une arête AB, L′ le milieu de l'arête opposée d'un de ces tétraèdres orthocentriques, *l'arête* $A_1 A_2$ *coïncide avec l'une des directions principales de l'ellipsoïde* E″ *au point* L; de même la droite CD, orthogonale à la précédente, est direction principale du même ellipsoïde en son milieu L′.

La géométrie des triplets.

Trois masses α, β, γ sont respectivement appliquées aux sommets A, B, C du triangle de référence. Le centre Γ des trois masses a pour coordonnées barycentriques des expressions proportionnelles à α, β, γ.

Si le système est rapporté aux axes centraux d'inertie, les trois conditions suivantes sont vérifiées:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0 \ ,$$
$$\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3 = 0 \ ,$$
$$\alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2 + \gamma x_3 y_3 = 0 \ ;$$

les indices 1, 2 et 3 affectent respectivement les deux coordonnées cartésiennes x_i et y_i des sommets A, B, C. L'élimination des masses entre ces trois conditions linéaires et homogènes conduit à la relation

$$\begin{vmatrix} x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

qui exprime que *les sommets du triangle de référence, le centre* Γ *(et l'orthocentre* H *du triangle) appartiennent à une même hyperbole équilatère dont les directions asymptotiques sont celles des axes principaux et centraux d'inertie.*

La construction des axes centraux d'inertie du triplet découle de cette proposition.

Par le point Γ, centre des masses, passe une hyperbole du faisceau des hyperboles équilatères circonscrites au triangle A B C. Il suffit de mener par Γ les parallèles aux asymptotes de cette hyperbole; ces deux parallèles sont précisément les axes de symétrie de l'ellipse centrale d'inertie.

En particulier, lorsque Γ est sur un côté, B C par exemple ($\alpha = 0$), les axes centraux sont le côté B C et la parallèle à la hauteur A H.

Lorsque le centre Γ est sur une hauteur, A H par exemple, les axes centraux d'inertie sont la hauteur A H et la parallèle menée par Γ au côté B C.

Cas où le centre des masses est l'orthocentre. Dans le cas

$$\frac{\alpha}{\operatorname{tg} A} = \frac{\beta}{\operatorname{tg} B} = \frac{\gamma}{\operatorname{tg} C} \ ,$$

le centre Γ *des masses coïncide avec l'orthocentre* H *du triangle.* Toutes les hyperboles équilatères circonscrites au triangle A B C passant par H, il y a indétermination pour la construction des axes centraux d'inertie. *L'ellipse d'inertie centrale est donc un cercle.*

Réciproquement d'ailleurs *pour que l'ellipse centrale d'un triplet* (α, β, γ) *de trois masses non-nulles disposées aux sommets du triangle* A B C *soit un cercle il faut que ces masses soient proportionnelles à* tg A, tg B *et* tg C; *le centre des masses est alors l'orthocentre* H.

Prenons

$$\alpha = \operatorname{tg} A , \qquad \beta = \operatorname{tg} B , \qquad \gamma = \operatorname{tg} C ;$$

la masse totale est

$$M = \alpha + \beta + \gamma = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C ;$$

le moment d'inertie par rapport à une droite quelconque passant par l'orthocentre est égal au double de la surface du triangle:

$$I = 4 R^2 \sin A \sin B \sin C = 2 S ;$$

l'expression du rayon de gyration est donc:

$$K^2 = \frac{I}{M} = 4 R^2 \cos A . \cos B . \cos C ;$$

par suite:

$$K^2 = - \rho^2$$

ρ désignant le rayon du cercle conjugué au triangle.

Le moment d'inertie polaire en H est

$$I_H = 4 S ;$$

le rayon de gyration par rapport à l'axe normal en H au plan du triangle est donc:

$$K_H^2 = - \mathfrak{P} ,$$

$\mathfrak{P}$ désignant la puissance de H par rapport au cercle circonscrit au triangle A B C:

$$\mathfrak{P} = - 8 R^2 \cos A \cos B \cos C .$$

Supposons les masses positives; le triangle a tous ses angles aigus. Dans ce cas, l'ellipsoïde d'inertie du triplet est une sphère, au point sous lequel les trois côtés du triangle sont vus sous des angles droits.

Ce cas remarquable est le seul pour lequel l'ellipse d'inertie du triplet est un cercle, en supposant les trois masses non-nulles. Lorsque Γ est en un sommet (A par exemple, pour $\beta = 0$ $\gamma = 0$), l'ellipse centrale d'inertie est le cercle-point A. La propriété caractérise donc les quatre points fondamentaux du faisceau des hyperboles équilatères.

Tandis qu'à tout point Γ du plan sont associées deux droites Δ Δ' comme axes centraux d'inertie, la question se présente plus simplement lorsque on se donne au contraire une droite Δ.

Une droite Δ étant imposée, il existe sur elle un point Γ et un seul, tel que Γ soit centre d'un triplet $(\alpha \beta \gamma)$ admettant Δ comme axe de symétrie de l'ellipse centrale d'inertie.

Δ étant donnée, il existe une hyperbole équilatère du faisceau l'admettant pour direction asymptotique. L'hyperbole rencontre Δ à distance finie en un point Γ unique, qui est précisément le point Γ.

La construction du point Γ s'effectue simplement. L'involution déterminée sur la droite Δ par l'ensemble des hyperboles équilatères du faisceau, associe le point Γ au point à l'infini de Δ. Les points doubles de l'involution sur Δ peuvent être définis par l'intersection de la droite avec le lieu des points de contact des tangentes menées aux hyperboles par un point déterminé de Δ: ce lieu, qui est en général une cubique, dégénère en une conique lorsque le point est sur l'un des côtés ou sur l'une des hauteurs du triangle. Par exemple, avec les notations qui vont être adoptées par la suite, si le point est la trace sur B C de la droite Δ, ce lieu a pour équation (en barycentriques)

$$vq\mathrm{Y}^2 + wr\mathrm{Z}^2 = p\mathrm{X}(v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z}) \;;$$

cette conique passant par A, H, les pieds des hauteurs relatives aux côtés AB, et AC coupe Δ aux deux points d'intersection de cette droite avec la conique conjuguée d'équation:

$$up\mathrm{X}^2 + vq\mathrm{Y}^2 + wr\mathrm{Z}^2 = 0 \;.$$

Voilà donc quatre coniques définissant les points doubles sur Δ.

Cas des droites de Simson. — Les asymptotes d'une hyperbole du faisceau équilatère ABCH sont les droites de Simson des deux points d'intersection du cercle circonscrit avec la droite inverse de l'hyperbole relativement au triangle. Réciproquement toute droite de Simson est asymptote d'une hyperbole équilatère circonscrite.

L'involution est donc spéciale lorsque la droite Δ est une droite de Simson. L'un des points doubles est à l'infini; le second est à distance finie. Dans le faisceau, il y a trois hyperboles dégénérées: chacune d'elles est constituée par un côté et la hauteur opposée; le point double à distance finie est donc le milieu du segment déterminé par ces deux droites sur la droite de Simson.

Nous obtenons ainsi une propriété intéressante des droites de Simson.

Les trois segments déterminés sur une droite de Simson par les côtés et les hauteurs du triangle A B C *ont même milieu.*

Nous reviendrons avec plus de précisions sur cette question, après l'étude de la relation entre les coniques d'inertie et les coniques conjuguées au triangle.

Formules générales. — Si l'équation d'une droite quelconque D du plan est, en coordonnées barycentriques,

$$u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w\mathrm{Z} = 0 \;,$$

les distances des sommets du triangle de référence à cette droite sont respectivement égales à u, v, w, sous la condition

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 2bc \cos A\, vw - 2ca \cos B\, wu - 2ab \cos C\, uv = 4S^2 ,$$

qui s'écrit encore:

$$\Sigma a^2 (u - v)(u - w) = 4S^2 .$$

Nous introduirons les coefficients

$$\operatorname{cotg} A = p , \qquad \operatorname{cotg} B = q , \qquad \operatorname{cotg} C = r ,$$

et poserons

$$U = v - w , \qquad V = w - u , \qquad W = u - v ;$$

U, V, W sont les coordonnées barycentriques du point à l'infini de la droite D. La condition précédente prend la forme:

$$pU^2 + qV^2 + rW^2 = 2S .$$

Nous l'écrirons

$$\Phi = 2S ,$$

en posant:

$$\Phi = pU^2 + qV^2 + rW^2 ;$$

$\Phi = 0$ est l'équation tangentielle des deux points cycliques.

La distance des deux points quelconques du plan de coordonnées barycentriques $M(\alpha\, \beta\, \gamma)$ et $M'(\alpha'\, \beta'\, \gamma')$ est alors:

$$\overline{MM'}^2 = 2S[p(\Delta\alpha)^2 + q(\Delta\beta)^2 + r(\Delta\gamma)^2]$$

c'est-à-dire

$$\overline{MM'}^2 = 2S\Phi(\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma) ,$$

en posant:

$$\Delta\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta' + \gamma'} - \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} , \qquad \text{etc.}$$

Equation quadratique des axes centraux d'inertie. — Les distances des sommets A B C à la droite D d'équation $uX + vY + wZ = 0$ étant u, v et w, sous la condition $\Phi = 2S$, le moment d'inertie du triplet par rapport à la droite est:

$$I = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 .$$

Pour déterminer les axes principaux Δ et Δ' d'inertie au centre Γ, il faut chercher le maximum et le minimum de cette fonction I des trois variables u, v et w, en posant qu'elles sont liées par les relations

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 ,$$
$$\Phi = 2S .$$

Ces deux conditions dérivées totalement permettent de déterminer des expressions proportionnelles aux différentielles du, dv, dw ; en les introduisant dans la condition $dI = 0$ on obtient

$$\sum \frac{v - w}{\alpha} [a^2(v + w - 2u) + (b^2 - c^2)(v - w)] = 0 ,$$

c'est-à-dire:

$$\sum \frac{1}{U}\left(\frac{r}{\beta} - \frac{q}{\gamma}\right) = 0 .$$

Telle est la condition pour que la droite soit un axe central Δ d'inertie. Les équations

$$\Sigma u X = 0 , \qquad \Sigma u \alpha = 0 ,$$

montrent que u, v, w sont proportionnelles à $\beta Z - \gamma Y$, etc.,.. et par suite que U, V, W ont des expressions proportionnelles à $(\alpha + \beta + \gamma) X - \alpha(X + Y + Z)$, etc... qui portées dans la condition précédemment formée donnent l'*équation quadratique du système des axes centraux d'inertie:*

$$\Sigma p \,.\, \alpha(\beta Z - \gamma Y) \,.\, [(\alpha + \beta + \gamma) X - \alpha(X + Y + Z)] = 0 .$$

Cette équation est identiquement satisfaite lorsque

$$\alpha p = \beta q = \gamma r ;$$

le point Γ est alors l'orthocentre H (de coordonnées barycentriques tg A, tg B, tg C). Ce résultat confirme bien la proposition déjà signalée: l'ellipse centrale d'inertie est un cercle lorsque Γ est en H.

Lorsque Γ est sur le côté B C, par exemple, $\alpha = 0$, l'un des axes est le côté $X = 0$ et l'autre la droite

$$X \frac{r\gamma - q\beta}{q + r} - \beta Z + \gamma Y = 0$$

perpendiculaire au côté BC.

Lorsque Γ est sur la hauteur AH, $\left(\frac{\beta}{\operatorname{tg} B} = \frac{\gamma}{\operatorname{tg} C}\right)$, la hauteur AH est l'un des axes :

$$qY = rZ ,$$

l'autre est la droite parallèle au côté BC:

$$(\alpha + \beta + \gamma) X = \alpha(X + Y + Z) .$$

Si la masse totale est nulle: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (le centre des masses Γ est alors à l'infini) l'équation des axes montre que l'un des axes est la droite à l'infini, tandis que l'autre est la droite d'équation

$$\Sigma \alpha^2 p (\beta Z - \gamma Y) = 0 ,$$

ou encore:

$$\Sigma \beta\gamma (q\beta - r\gamma) X = 0 ;$$

on vérifie que ses coordonnées satisfont à l'équation tangentielle

$$\Sigma pu (v - w)^2 = 0 ,$$

qui sera formée plus loin pour l'enveloppe des droites de Simson du triangle.

Equation aux moments centraux d'inertie. — L'expression du moment d'inertie du triplet par rapport à une droite prend une forme remarquable lorsque la droite passe par le centre Γ des masses. Des équations

$$I = \alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2 ,$$

$$o = \alpha u + \beta v + \gamma w ,$$

on déduit:

$$(\alpha + \beta + \gamma) I \equiv (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) - (\alpha u + \beta v + \gamma w)^2$$
$$= \Sigma \beta\gamma U^2 ;$$

et par suite:

$$I = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \left[\frac{U^2}{\alpha} + \frac{V^2}{\beta} + \frac{W^2}{\gamma} \right] .$$

La condition fondamentale $\Phi = 2S$ exprime précisément, en application de cette formule générale que le triplet $(\alpha p = \beta q = \gamma r)$ dont le centre est en H a par rapport à toute droite passant par l'orthocentre un moment d'inertie $I = 2S$.

Pour les axes centraux, on aura:

$$U + V + W = 0 ;$$

$$\frac{l}{U} + \frac{m}{V} + \frac{n}{W} = 0 ,$$

$$\Sigma p U^2 = 2S .$$

en posant:

$$l = \frac{r}{\beta} - \frac{q}{\gamma} , \qquad m = \frac{p}{\gamma} - \frac{r}{\alpha} , \qquad n = \frac{q}{\alpha} - \frac{p}{\beta} .$$

Nous prendrons $I = 2S . \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\theta$, d'où

$$\frac{\Sigma \frac{U^2}{\alpha}}{\Sigma p U^2} = 0 .$$

L'élimination de U, V, W entre les trois équations homogènes du second degré:

$$\Sigma U^2 \left(p\theta - \frac{1}{\alpha}\right) = 0 ,$$

$$\Sigma U = 0 \qquad \Sigma \frac{l}{U} = 0 ,$$

exprimant le concours de deux coniques et de la droite de l'infini en un certain point, conduit à la condition

$$(\mathcal{A} l + \mathcal{B} m + \mathcal{C} n)^2 + (l^2 + m^2 + n^2 - 2lm - 2mn - 2nl)\Sigma \mathcal{A}\mathcal{B} = 0$$

avec

$$\mathcal{A} = p\theta - \frac{1}{\alpha} , \qquad \mathcal{B} = q\theta - \frac{1}{\beta} , \qquad \mathcal{C} = r\theta - \frac{1}{\gamma} .$$

Mais $\mathcal{A} l + \mathcal{B} m + \mathcal{C} n = 0$; il reste donc

$$\Sigma \mathcal{A}\mathcal{B} = 0$$

et par suite:

$$\theta^2 - \theta . \Sigma \frac{q + r}{\alpha} + \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0 .$$

Comme θ est une expression égale à I à un facteur près, il en résulte que les moments d'inertie principaux I_1 et I_2 au centre Γ des masses sont définies par les deux conditions:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \dfrac{2S}{\alpha + \beta + \gamma} . \sum (q + r)\beta\gamma . \\ I_1 I_2 = 4S^2 . \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} . \end{cases}$$

Le moment d'inertie polaire par rapport au point Γ est $I_1 + I_2$. Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour équation

$$\Sigma a^2 YZ = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma (q + r) YZ = 0 ,$$

puisque les côtés s'expriment en fonction de $p\ q\ r$ par des formules telles que

$$a^2 = 2S(q + r) \ , \qquad \text{etc.}$$

La puissance du centre Γ par rapport au cercle circonscrit (centre O, rayon R) est:

$$\overline{O\Gamma}^2 - R^2 = - \frac{\Sigma a^2 \beta\gamma}{(\alpha + \beta + \gamma)^2} \cdot$$

Nous trouvons ainsi la relation

$$\frac{I}{M} = - (\overline{O\Gamma}^2 - R^2) \ ;$$

le carré du rayon de gyration du triplet par rapport à l'axe normal au plan du triangle au centre Γ *des masses est égal à la puissance, changée de signe, du point* Γ *relativement au cercle circonscrit au triangle.*

Cette propriété est immédiate, si l'on observe que le moment polaire du triplet par rapport au centre O du cercle circonscrit est MR^2.

Droite imposée comme axe central d'inertie. — Soit une droite Δ de coordonnées *absolues* u, v, w. Soient U, V, W les coordonnées de son point à l'infini.

Un point M quelconque de la droite Δ sera représenté au moyen d'un paramètre t. Les coordonnées du point seront proportionnelles aux expressions suivantes:

$$X = U\left(t - \frac{1}{u}\right) \ , \qquad Y = V\left(t - \frac{1}{v}\right) \ , \qquad Z = W\left(t - \frac{1}{w}\right) \ ;$$

le paramètre t est proportionnel à la distance du point M à une origine déterminée sur la droite. La distance entre deux points M M' de la droite, de paramètres respectifs t et t', a pour expression

$$\overline{MM'} . \sum \frac{U}{u} = 2S(t - t') \ ,$$

c'est-à-dire

$$\overline{MM'} = 2S . \frac{uvw}{UVW} . (t - t') \ .$$

Les coniques du faisceau ponctuel (A B C H) ont pour équation générale $\Sigma \frac{\mathcal{L}}{X} = 0$, avec la condition $\Sigma p \mathcal{L} = 0$. L'hyperbole équilatère ayant la droite Δ pour direction asymptotique est définie par la condition $\Sigma \frac{\mathcal{L}}{U} = 0$. Il faut donc prendre pour coefficients:

$$\mathcal{L} = U(qV - rW) \ . \qquad \text{etc.}$$

En introduisant la distance H de l'orthocentre H à la droite Δ, ces expressions des coefficients dans l'équation de l'hyperbole équilatère deviennent (à un facteur près):

$$\mathcal{L} = \frac{U}{p}(H - u) .$$

Pour définir le point Γ — centre de masses tel que Δ soit axe central d'inertie — il convient de considérer ce point Γ comme étant le point à distance finie d'intersection de la droite V avec l'hyperbole équilatère précédente. Le paramètre t de ce point Γ est donc la racine de l'équation

$$\sum \frac{H - u}{p\left(t - \frac{1}{u}\right)} = 0 ;$$

l'équation

$$\sum \frac{u(H - u)}{p(ut - 1)} = 0 ,$$

définit une racine t telle que

$$\frac{1}{t} = H + \frac{(H - u)(H - v)(H - w)}{\Theta - H^2} ,$$

$$u - \frac{1}{t} = qr . VW . \frac{H - u}{\Theta - H^2} ,$$

avec

$$\Theta = qru^2 + rpv^2 + pqw^2 ;$$

$$H = qru + rpv + pqw ;$$

(u, v, w sont les distances des sommets à la droite Δ, H est la distance de l'orthocentre; Θ est l'expression du moment d'inertie par rapport à Δ de trois masses qr, rp, pq ayant pour centre le point H). Il résulte que l'on peut prendre pour coordonnées du point Γ des expressions proportionnelles aux suivantes:

$$X = \frac{H - u}{pu} , \qquad Y = \frac{H - v}{qv} , \qquad Z = \frac{H - w}{rw} .$$

On peut encore poser:

$$X = \frac{\mathcal{L}}{uU} , \qquad Y = \frac{\mathcal{M}}{vV} , \qquad Z = \frac{\mathcal{N}}{wW} .$$

$\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ étant les coefficients de l'équation de l'hyperbole équilatère admettant Δ pour direction asymptotique.

Cas d'un centre des masses à l'infini. — Le point Γ est à l'infini pour:

$$X + Y + Z = 0$$

$$\sum \frac{H - u}{pu} = 0 \;;$$

on peut encore poser $\frac{1}{t} = 0$ et la condition prend la forme

$$H(\Theta - H^2) + (H - u)(H - v)(H - w) = 0 \;;$$

l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites Δ telles que Γ soit à l'infini se met sous la forme :

$$\Sigma pu U^2 = 0 \;.$$

Une droite Δ (u, v, w), quelconque du plan, rencontre le côté BC du triangle de référence en un point P qui donne lieu à la relation

$$\overline{BP}^2 - \overline{CP}^2 = a^2 . \frac{v + w}{v - w} \;;$$

les droites de Simson, sont définies par la condition

$$\Sigma \overline{BP}^2 = \Sigma \overline{CP}^2 \;,$$

exprimant le concours des perpendiculaires aux côtés en P et les deux autres points analogues. L'équation tangentielle de l'hypocycloïde à trois rebroussements enveloppe les droites de Simson est donc

$$\Sigma a^2 . \frac{v + w}{v - w} = 0 \;;$$

c'est-à-dire

$$\Sigma (q + r) \frac{v + w}{v - w} = 0 \;;$$

puisque les carrés des côtés du triangle ont pour expression

$$a^2 = 2S(q + r) \;, \qquad \text{etc.}$$

l'équation rendue entière est:

$$\Sigma pu (v - w)^2 = 0 \;,$$

$$\Sigma pu U^2 = 0 \;,$$

Ainsi est reconnue l'identité des droites de Simson et des droites telles que Γ soit à l'infini.

Exemples et remarques. — Lorsque Γ est en G ($\alpha = \beta = \gamma$; cas de la surface homogène d'une plaque triangulaire ayant A, B, C pour milieux des côtés), les axes principaux sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère (A B C G H), d'équation (en barycentriques)

$$\sum \frac{\sin A \ \sin (B - C)}{X} = 0 \ ;$$

c'est l'hyperbole de Kiepert.

Si Δ est la droite d'équation

$$X \operatorname{tg} A + Y \operatorname{tg} B + Z \operatorname{tg} C = 0$$

$\left(u = \frac{1}{p}, \ v = \frac{1}{q}, \ w = \frac{1}{r}\right)$, Γ a des coordonnées proportionnelles aux expressions

$$X = p(q^2 + r^2) - qr(q + r) \ , \qquad \text{etc.}$$

Γ est l'intersection de la droite Δ et de la droite d'Euler.

Si Δ est l'axe anti-orthique $\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 0$, les coordonnées de Γ sont

$$X = \sin^2 A (\cos B + \cos C - 1) \ ; \qquad \text{etc.}$$

le point Γ est inverse du point de coordonnées

$$X = \frac{1}{\cos B + \cos C - 1} \ , \qquad \text{etc.}$$

(le point de coordonnées *normales* $\frac{1}{\cos B + \cos C - 1}$, etc. est l'intersection du cercle circonscrit avec l'hyperbole de Feuerbach; d'où une construction du point Γ).

Lieu du point Γ tel que l'un des axes centraux associés à ce point passe par un point imposé F (X_0, Y_0, Z_0).

Le lieu est une cubique passant par A, B, C et F qui est point double; l'équation de cette cubique est en coordonnées courantes $(\alpha\beta\gamma)$:

$$\Sigma p\,\alpha(\beta Z_0 - \gamma Y_0)\,[\alpha(X_0 + Y_0 + Z_0) - X_0(\alpha + \beta + \gamma)] = 0 \ ;$$

les tangentes au point double sont les axes centraux associés à ce point.

Il y a décomposition lorsque le point F est sur les côtés, les hauteurs ou à l'infini.