

SUR LE PRINCIPE DE PERMANENCE ET LA THÉORIE ANALYTIQUE DES FRACTIONS

Autor(en): **Desaint, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1931)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-23881>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LE PRINCIPE DE PERMANENCE ET LA THÉORIE ANALYTIQUE DES FRACTIONS

PAR

L. DESAINT (Neuilly, Seine).

Dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (Arithmétique, Volume I), édition française, il est question d'un principe que les mathématiciens appliquent souvent, principe qui est appelé dans cet ouvrage PRINCIPE DE PERMANENCE. C'est peut-être moins un principe philosophique qu'un principe psychologique de création. L'expliquer tout au long n'a pas été tenté, que je sache; mais on le trouve à l'origine du passage d'un domaine abstrait de concepts, à un domaine plus abstrait, quand il s'agit de passer de l'arithmétique du nombre entier à l'arithmétique de la fraction ou du rapport, par exemple, ou bien quand il s'agit d'édifier une théorie purement analytique du nombre négatif, ou de consolider une théorie correcte du nombre imaginaire en supposant constitué le domaine abstrait du nombre réel. On le voit encore intervenir dans la question subtile de la sommation des séries divergentes et aussi bien dans la théorie des séries asymptotiques de H. Poincaré.

Est-il besoin d'ajouter qu'il se trouve à la base même de l'Analyse contemporaine, puisqu'il intervient de toutes façons dans la définition, au moyen d'une série entière de la variable complexe, des fonctions fondamentales de l'Analyse, telles que e^z , $\sin z$, $\cos z$. Il intervient aussi dans la définition de fonctions élémentaires de la variable complexe, comme $\log z$ et avec $\operatorname{tg} z$ par des intégrales prises entre limites imaginaires, dont on étudiera les périodes, ou par des intégrales de Hermite.

Le principe de permanence peut s'exposer ainsi: dans un domaine d'idées, des propositions ont été démontrées; pour créer un domaine plus abstrait il faut d'abord fixer des définitions,

qui, afin de lier les deux domaines devront tenir compte des propositions du premier domaine moins abstrait.

N'oublions pas que pour le psychologue, il y aura un fait curieux à noter dans l'évolution de l'Analyse du dernier siècle. Alors que la théorie des fonctions analytiques, des fonctions elliptiques et abéliennes, ainsi que la théorie des intégrales d'une variable complexe, se développaient rapidement, préparant la subtile théorie des fonctions de notre époque, les premiers principes de l'Analyse étaient cependant négligés aussi bien en théorie qu'en pratique. Ce n'est que tardivement, après les premiers travaux de J. Bertrand, que Bachmann et Dedekind, plus tard Baire, purent fournir une théorie des quantités irrationnelles qui aurait dû, bien avant l'apparition de leurs travaux, être créée, pour rendre possible une Algèbre et une Analyse conformes à un élémentaire sens critique.

Certains développements fournis ici qu'on pourrait, à cause de leur simplicité analytique, juger inutiles, ont pour but de signaler et de corriger une semblable difficulté dans un domaine de concept classique, le domaine fractionnaire.

Nous allons faire ici l'exposé analytique des fractions.

Nous disons que les deux symboles :

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{p'}{q'}$$

sont égaux (alors que nous supposons seulement établie l'Arithmétique du nombre entier), quand :

$$pq' = p'q .$$

Cette égalité, écrite dans le domaine entier, a un sens, quand bien même les deux symboles n'en auraient aucun dans ce domaine entier. Cette définition d'ailleurs n'est pas en contradiction avec des propriétés établies jusqu'ici, lorsque

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{p'}{q'}$$

deviennent des entiers; on aurait alors, par démonstration :

$$pq' = p'q .$$

Rappelons nettement, pour nos études ultérieures, qu'il ne doit y avoir dans les définitions créant un domaine plus abstrait,

aucune contradiction avec les propriétés du domaine précédent, dans le cas particulier où les quantités engagées dans les définitions se réduiraient à des concepts de ce dernier domaine. Dans la justification de l'introduction, en Algèbre, de l'exposant fractionnaire, ces idées critiques ont été rigoureusement appliquées; mais leur usage conscient et répété devrait intervenir, avec plus de soin qu'on ne leur en accorde, dès les premières pages de toute Analyse correcte.

Après avoir défini l'égalité de deux fractions, il y a lieu d'appliquer la définition qui la fixe, à la démonstration de la proposition la plus importante de la théorie des fractions:

Une fraction conserve sa valeur quand on multiplie ses deux termes par le même nombre entier.

Soit à démontrer:

$$\frac{p}{q} = \frac{pm}{qm}.$$

Ici

$$p' = pm, \quad q' = qm.$$

Il reste à vérifier que:

$$p \cdot (qm) = q \cdot (pm)$$

égalité vraie dans le domaine entier.

On en déduirait tout de suite que toute fraction égale à une fraction irréductible a ses termes équi-multiples des termes de celle-ci.

Définissons l'addition par l'égalité:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} = \frac{a + a'}{b}.$$

Il n'y a pas à redouter de contradiction avec le domaine entier, car si

$$\begin{aligned} a &= bq \\ a' &= bq' \end{aligned}$$

q et q' étant des entiers, on a aussi bien:

$$a + a' = b(q + q')$$

c'est-à-dire

$$q + q' = \frac{a + a'}{b};$$

pour l'addition, en général, on commencera par réduire les fractions données au même dénominateur.

L'égalité

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b} = \frac{a - a'}{b} \quad a > a'$$

définira la soustraction. Si les fractions n'avaient pas le même dénominateur, on commencerait par les y réduire. D'ailleurs l'égalité précédente n'est pas en contradiction avec le domaine entier. Si

$$a = bq \quad a' = bq'$$

on en déduit:

$$a - a' = b(q - q')$$

$$q - q' = \frac{a - a'}{b}.$$

La multiplication sera donnée par:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'};$$

c'est là l'égalité de définition.

Il n'y a pas de contradiction avec le domaine entier, car si

$$\begin{aligned} a &= bq \\ a' &= b'q' \end{aligned} \quad (q, q', \text{ entiers})$$

on en tire

$$aa' = (bb') \cdot qq'$$

$$qq' = \frac{aa'}{bb'}.$$

La division sera définie par

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{ba'}.$$

Voyons si le domaine entier n'y contredit pas par ses propres propositions.

Si

$$a = bq, \quad a' = b'q' \quad q : q' = q''$$

q, q', q'' étant des entiers, on peut écrire:

$$q = q'q'' \quad a = bq'q''$$

d'où

$$ab' = bb'q'q'' = (a'b)q''$$

par suite

$$q'' = \frac{ab'}{ba'}.$$

C'est alors qu'un long travail devra être entrepris pour voir si les principales propositions du domaine entier subsistent dans le domaine fractionnaire.

1^o Dans une suite d'additions et de soustractions de fractions, on peut intervertir l'ordre des termes.

En effet, d'après les définitions fondamentales, on écrira de proche en proche :

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b} + \frac{a''}{b} = \frac{a - a' + a''}{b}$$

or

$$\frac{a}{b} + \frac{a''}{b} - \frac{a'}{b} = \frac{a + a'' - a'}{b}.$$

Les numérateurs seuls ont changé et l'on peut dans le domaine entier changer l'ordre des additions et des soustractions. Bien entendu, on peut toujours supposer que les fractions ont été, avant démonstration, RÉDUITES AU MÊME DÉNOMINATEUR. On verrait aussi facilement que pour faire la somme de deux polynômes portant sur des fractions il suffit d'ajouter aux éléments du premier ceux du second précédés des signes qu'ils y possédaient.

Il suffira de le démontrer, dans le cas suivant :

$$P + Q = \left(\frac{a}{b} - \frac{a'}{b}\right) + \left(\frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha'}{b}\right) = \frac{a}{b} - \frac{a'}{b} + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha'}{b}.$$

En effet, nous écrirons :

$$\left(\frac{a - a'}{b}\right) + \left(\frac{\alpha - \alpha'}{b}\right) = \frac{a - a' + \alpha - \alpha'}{b};$$

cette dernière expression est, d'un autre côté, la somme :

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b} + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha'}{b}.$$

Ensuite nous aurons à étendre au domaine fractionnaire les propositions relatives, dans le domaine entier, à la multiplication.

Tout d'abord, on peut intervertir dans un produit de fractions l'ordre des facteurs :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdots \frac{a''}{b''} = \frac{a''}{b''} \cdot \frac{a'}{b'} \cdots \frac{a}{b}$$

par exemple.

Il suffit de se reporter à la définition de la multiplication :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdots \frac{a''}{b''} = \frac{aa'a''}{bb'b''} ,$$

$$\frac{a''}{b''} \cdot \frac{a'}{b'} \cdots \frac{a}{b} = \frac{a''a'a}{b''b'b} ;$$

or, en haut et en bas, dans l'Arithmétique du nombre entier on peut intervertir d'une façon quelconque l'ordre des facteurs.

Dans le domaine fractionnaire, pour multiplier un polynôme par une fraction, il suffit de multiplier chacun des termes du polynôme par cette fraction, en mettant devant chacun d'eux les signes dont ils étaient précédés dans le polynôme donné.

En désignant par A la somme des termes précédés du signe plus et par B celle qui correspond aux fractions précédées du signe moins, le polynôme considéré s'écrira :

$$P = A - B .$$

Considérons $P \cdot f = (A - B) f$.

Tout d'abord rappelons le lemme, rapide à démontrer, que « pour multiplier une somme de fractions par une fraction f , il suffit d'en multiplier tous les termes par cette fraction f et d'ajouter ces derniers produits ».

$$Af = \left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} \cdots + \frac{a''}{b} \right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{(a + a' \cdots + a'') p}{bq} ,$$

car

$$A = \frac{a + a' \cdots + a''}{b} .$$

Par suite

$$Af = \frac{ap + a'p \cdots + a''p}{bq} = \frac{ap}{bq} + \frac{a'p}{bq} \cdots + \frac{a''p}{bq} .$$

Revenons alors au théorème précédent plus large d'énoncé.
Posons

$$A = \frac{\alpha}{b}, \quad B = \frac{\beta}{b}.$$

Nous pourrions écrire

$$P.f = \left(\frac{\alpha - \beta}{b} \right) \cdot \frac{p}{q} = \frac{\alpha p}{bq} - \frac{\beta p}{bq} = Af - Bf.$$

Il suffira d'appliquer le lemme que nous venons de rappeler et le théorème de l'interversion de l'ordre des éléments d'un polynôme pour mettre $P.f$ sous la forme indiquée dans l'énoncé du théorème précédent.

En général, « pour multiplier deux polynômes l'un par l'autre, on les multipliera terme à terme en observant la loi des signes (loi qui en arithmétique se réduit à un moyen de simplifier les énoncés) ».

Comme précédemment en vue d'écourter la démonstration, nous écrirons les polynômes sous forme simplifiée:

$$P.Q = (A - B)(A' - B')$$

en appliquant le théorème précédent, nous écrirons:

$$P.Q = AA' - AB' - BA' + BB'.$$

Si A, B, A', B' se composent d'un certain nombre de fractions, les quatre termes précédents du produit $P.Q$, représentent dans un certain ordre les produits deux à deux des termes de P par ceux de Q . La règle des signes est d'ailleurs évidente sur le développement précédent de $P.Q$.

Il nous resterait alors à donner les théorèmes si importants sur les puissances qui précèdent toute théorie des radicaux, à voir aussi ce que deviennent les propositions essentielles de la division dans le domaine fractionnaire; enfin, il resterait, et j'espère revenir sur tous ces points dans un prochain article, à introduire l'idée de limite, de fonction et d'algorithme illimité dans le domaine fractionnaire.