Réunion de Saint- Gall, 12 septembre 1930.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1930)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE.**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et Communications.

Réunion de Saint-Gall, 12 *septembre* 1930.

La Société mathématique suisse a tenu sa vingtième assemblée annuelle ordinaire à Saint-Gall, le 12 septembre 1930, sous la présidence de M. le Professeur Samuel Dumas, président. Selon la tradition, cette réunion a eu lieu en même temps que la session annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles (111$^{\text{me}}$ session).

La partie scientifique a été consacrée aux communications de MM. Emile Marchand, J. J. Burkhardt, L. Kollros, A. Speiser, G. Tiercy, R. Wavre et G. Dumas.

1. — Emile Marchand (Zurich). — *Le problème du risque dans l'assurance sur la vie.* — Le résultat financier des entreprises d'assurance sur la vie dépend d'un grand nombre de facteurs: les uns très importants, comme par exemple les fluctuations du taux de l'intérêt, les épidémies, les guerres, qui ne permettent pas une prévision mathématique; d'autres moins importants, comme par exemple les fluctuations de la mortalité dues au hasard, qui peuvent faire l'objet d'une étude au point de vue mathématique, en admettant certaines hypothèses, qui, à vrai dire, ne sont pas réalisables (table de mortalité exacte, répartition uniforme des capitaux, indépendance des risques assurés entre-eux). Le problème du risque, autrement dit l'étude des écarts dus uniquement au hasard entre la mortalité effective et la mortalité présumée, a-t-il dans ces conditions un intérêt ? Certainement, tout d'abord un intérêt théorique pour satisfaire notre curiosité scientifique, et, au point de vue pratique, il a l'avantage de nous indiquer les méthodes pour la détermination d'une valeur minimum de la réserve pour les fluctuations du risque dues au hasard.

Le 9$^{\text{me}}$ Congrès international d'actuaires tenu à Stockholm en juin 1930 avait proposé comme sujet de discussion, parmi d'autres, le problème du risque dans l'assurance sur la vie. Parmi les résultats publiés, les suivants méritent d'être relevés:

1. La prime ou les primes déterminées dans la supposition que sur l_x personnes d'âge x il en meurt exactement la première année d_x, la deuxième année d_{x+1}, etc., et qu'il en vive, à l'âge $x+n$, l_{x+n} sont exactement celles auxquelles on est conduit en faisant une supposition plus générale, à savoir que sur l_x personnes, il en meurt la première année a_1, la deuxième année a_2, etc., et qu'il en vive, à l'âge $x+n$, a_{n+1}, toutes les possibilités de la décomposition de l_x en $a_1+a_2 .. + a_{n+1}$, en nombres entiers non négatifs, intervenant avec la probabilité de leur arrivée.

2. Le calcul du risque moyen quadratique pour un groupe de s assurés de même âge, à savoir le calcul de la racine carrée de la somme des carrés des pertes et des bénéfices possibles, chaque perte et chaque bénéfice intervenant avec la probabilité de son arrivée, peut être ramené aux opérations successives suivantes:

a) calcul du risque moyen quadratique dans le cas d'un assuré pris individuellement pour les années d'assurance successives,

d'où

b) détermination du risque moyen quadratique toujours dans le cas d'un assuré pour la durée totale de l'assurance,

d'où

c) calcul du risque moyen quadratique pour le groupe de s assurés pour la durée totale de l'assurance.

Cette méthode s'appuie entre autres sur un théorème dû à Hattendorff, dont plusieurs démonstrations rigoureuses ont été publiées en 1929 [1].

3. Le calcul du risque moyen linéaire pour un assuré pris individuellement, autrement dit le calcul de la moyenne arithmétique des pertes et des bénéfices possibles en valeur absolue, chaque perte et chaque bénéfice intervenant avec la probabilité de son arrivée, ne présente pas de difficulté. Par contre, l'extension à un groupe des assurés n'a été résolué que dans un nombre restreint de cas simples.

4. La prudence s'impose avant d'appliquer les résultats de la théorie des erreurs au problème du risque dans l'assurance sur la vie. Lorsque le nombre d'assurés n'est pas très grand, la répartition de s décès autour de la valeur la plus probable est donnée plus exactement par les exposants de Poisson [2] que par l'application de la loi de Gauss.

2. — J. J. Burckhardt (Bâle). — *Remarques sur la cristallographie.* — Pour obtenir les groupes de l'espace, on peut utiliser une

---

[1] J. F. Steffensen, *On Hattendorff's Theorem in the Theory of Risk. Skandinavisk Aktuarietidskrift* 1929, Häft 1-2.

[2] Karl Pearson, *Tables for Statisticians and Biometricians* 1914, page 113.

méthode arithmétique, que nous expliquons à l'aide des 17 groupes du plan. Nous montrons comment on peut passer de ces 17 groupes aux 80 groupes du plan bilatéral. (Pour plus de détails, voir les *Commentarii mathematici helvetici*, vol. 2, p. 91 et *Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft*, 1930).

3. — L. Kollros (Zurich). — *Problèmes et théorèmes de géométrie.* — I. *Problèmes d'Apollonius et de Steiner sur une quadrique* S.

On donne 3 coniques a_1, a_2, a_3, sur S; trouver les coniques de S tangentes à la fois à a_1, a_2 et a_3.

Par a_1 et a_2 on peut mener 2 cônes du second ordre dont les sommets sont B_3 et I_3. Soient, de même, B_1 et I_1, B_2 et I_2 les sommets des paires de cônes menés par a_2 et a_3, respectivement a_3 et a_1. Ces 6 points B et I sont dans le plan polaire du point P commun aux plans de a_1, a_2, a_3. Ils sont 3 à 3 sur 4 droites d. Par chacune de ces droites $B_1B_2B_3$, $B_1I_2I_3$, $I_1B_2I_3$ et $I_1I_2B_3$ on peut mener 2 plans tangents aux 3 cônes dont les sommets sont sur la droite. Les 8 plans ainsi obtenus coupent S suivant les 8 coniques cherchées.

Si S est une sphère, les cercles isogonaux aux 3 cercles a_1, a_2, a_3 sont répartis sur 4 faisceaux de plans dont les axes sont les 4 droites d. La détermination des cercles de S qui coupent a_1, a_2, a_3 sous des angles donnés φ_1, φ_2, φ_3, se ramène au problème d'Apollonius, car un cercle qui se déplace sur S en coupant respectivement a_1 et a_2 sous les angles φ_1 et φ_2 reste tangent à 2 cercles fixes c_1 et c_2 de S; si x est une position du cercle mobile, les plans tangents à x menés par la droite commune aux plans de a_1 et a_2 coupent S suivant les 2 cercles c_1 et c_2.

Il y a 8 cercles isogonaux à 4 cercles d'une sphère S; les sommets des 12 cônes du second ordre passant par ces cercles, pris 2 à 2, sont 6 à 6 dans 12 plans; 4 de ces plans ne dépendent que de 3 des 4 cercles; les 8 autres coupent S suivant les 8 cercles isogonaux cherchés.

En partant d'une hypersphère de l'espace à 4 dimensions e_4, on trouverait de même les 16 sphères tangentes à 4 sphères, ou les coupant sous des angles donnés, ou encore les 8 faisceaux de sphères isogonales à 4 sphères et les 16 sphères isogonales à 5 sphères données.

Ces résultats sont, en somme, identiques à ceux du beau mémoire posthume de Steiner sur les cercles et les sphères qui va être publié chez Orell Füssli (Zurich) par MM. Fueter & Gonseth, puisqu'on passe des uns aux autres par une projection stéréographique.

II. *Problème de Malfatti.* La solution géométrique de Steiner (Crelle 1 ou *Ges. Werke* I, p. 35), démontrée par Schröter (Crelle 77), permet de résoudre d'une façon analogue le problème (18, Steiner, *Ges. Werke* I, p. 39): On donne 3 coniques a_1, a_2, a_3 sur S; trouver 3 autres coniques de S tangentes entre elles et dont chacune touche 2 des coniques données.

Soient b_1, b_2, b_3 les coniques situées dans les plans polaires de

B_1, B_1, B_3; c_1 la conique tangente à a_1 (en A_1), b_2 et b_3; c_2 et c_3 les coniques tangentes respectivement à $a_2\,b_3\,b_1$ et $a_3\,b_1\,b_2$; enfin t_1 une conique passant par A_1 et tangente à c_2 et c_3; t_2 et t_3 deux coniques analogues; alors, les 3 coniques x_1, x_2, x_3 tangentes respectivement à $a_2\,a_3\,t_2\,t_3$, $a_3\,a_1\,t_3\,t_1$, $a_1\,a_2\,t_1\,t_2$ sont des solutions du problème.

III. *Configuration de Clifford.* Si l'on projette un quadrilatère complet q stéréographiquement sur une sphère, les plans $a_1\,a_2\,a_3\,a_4$ projetant les 4 côtés et les plans $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$ qui correspondent aux 4 triangles de q forment 2 tétraèdres de Möbius ($a_1\,a_1\,a_3\,b_4$ et $b_1\,b_2\,b_3\,a_4$) à la fois inscrits et circonscrits l'un à l'autre; les 8 sommets sont: le centre de projection, les projections des 6 sommets de q et le point commun aux 4 plans $b_1\,b_2\,b_3\,b_4$ (projection du foyer de la parabole tangente aux 4 côtés de q).

Si l'on part de 5 droites, on a le théorème de Miquel: 5 droites, prises 4 à 4, déterminent 5 paraboles dont les foyers sont sur un cercle. La projection stéréographique de la figure de Miquel donne lieu à une configuration de 16 points et de 16 plans; chaque plan passe par 5 points et chaque point est sur 5 plans. Plus généralement, la figure de Clifford (*Math. Papers*, p. 38) devient, par projection stéréographique, une configuration de 2^n plans et 2^n points telle que chaque plan passe par $(n+1)$ points et que chaque point soit sur $(n+1)$ plans. Cette configuration existe sans la restriction que les points soient sur une sphère; elle ne dépend que des axiomes d'incidence.

Il n'existe pas de théorème analogue à celui de Clifford dans l'espace à 3 dimensions e_3, mais si l'on considère 5 plans de e_3 et les 5 sphères circonscrites aux tétraèdres qu'ils déterminent 4 à 4 on arrive, par projection stéréographique sur une hypersphère de e_4 à une configuration de 10 solides et de 16 points, telle que chaque solide contienne 8 points et que chaque point soit sur 5 solides.

Six plans a_1, ..., a_6 de e_3 se coupent 3 à 3 en 20 points P_{123} ... P_{456} et déterminent 4 à 4 quinze sphères c_{12} (circonscrite au tétraèdre $a_3\,a_4\,a_5\,a_6$), ..., c_{56}. Dans chaque plan, on a la figure de Miquel; les 5 points F_{61}, ..., F_{65} situés dans le plan a_6 sont sur un cercle. Il y a, en tout, 30 points F_{ik}; F_{12} est différent de F_{21}. Les 3 sphères $c_{45}c_{46}c_{56}$ qui passent par P_{123} se coupent encore en un second point P'_{123}; il y a 20 de ces points P'. En projetant stéréographiquement d'un point A sur une hypersphère S de e_4, on voit que les projections des points P' sont 10 à 10 sur 6 solides b_1, ..., b_6 qui se coupent en un point B de S; b_1 contient les projections des 10 points P'_{123} ... P'_{156} et des 5 points F_{12}, ..., F_{16}. On arrive donc, dans e_4, à une configuration de 27 solides $(6a + 15c + 6b)$ et de 72 points $(1A + 20P + 30F + 20P' + 1B)$. Par chaque point, il passe 6 solides et dans chaque solide, il y a 16 points. Cette configuration est analogue à celle des 27 droites et des 36 double-six (= 72 sextuples) de la surface du 3^{me} degré, où chaque droite appartient à 16 sextuples. Elle admet un groupe de 72.6 ! permutations pour lesquelles les relations d'incidence trouvées restent invariantes [1].

IV. *Le théorème de Miquel peut se transformer en celui du double-six de Schläfli.* Toute parabole dont le foyer est sur un cercle est triangulairement inscrite au cercle. 5 droites, prises 4 à 4, déterminent donc 5 paraboles triangulairement inscrites au cercle (c) contenant les 5 foyers. La figure de Miquel, complétée par la droite à l'infini et par la conique tangente aux 5 droites, se transfo·me projectivement en une figure de 6 coniques a_1, ..., a_6 triangulairement inscrites à une conique c et tangentes 5 à 5 à chacune des 6 droites b_1, ..., b_6; b_1, par exemple, touche a_2 a_3 a_4 a_5 et a_6 et la conique a_1 touche les 5 droites b_2 b_3 b_4 b_5 et b_6.

Considérons la conique c comme projection d'une cubique gauche C à partir de l'un de ses points; à toute droite b du plan de c correspond une bisécante B de la cubique C; à un triangle inscrit dans c correspond un plan de l'espace. Aux plans passant par une droite A (non bisécante de C) correspondent une infinité de triangles inscrits à c et circonscrits à une autre conique a; à une bisécante B qui coupe A correspond une tangente b à la conique a et inversement. Donc, aux 6 droites b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 et aux 6 coniques a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 correspondent les 12 droites B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 et A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 d'un double-six. Chaque droite A coupe 5 droites B et inversement.

4. — A. Speiser (Zurich). — *Un théorème concernant les arbres topologiques.* — Il s'agit du théorème: l'ensemble des chemins finaux dans un arbre topologique est fini ou dénombrablement infini ou de la puissance du continu. La démonstration utilise les nombres transfinis de Cantor.

5. — G. Tiercy (Genève). — *De la figure et de la densité superficielle moyenne de la Terre.* — On sait que les géodésiens ont adopté, en principe, la valeur $h_1 = \frac{1}{297}$ pour l'aplatissement du sphéroïde terrestre (Congrès de Madrid, 1924). Cette valeur a été choisie parce qu'elle permettait de rendre compe, *en première approximation*, du comportement de la pesanteur g à la surface de la Terre.

Mais cette valeur n'est pas satisfaisante si l'on fait allusion aux mesures géodésiques elles-mêmes; ces mesures conduisent plutôt à l'aplatissement autrefois adopté par Clarke $\left(\frac{1}{293} \text{ à } \frac{1}{295}\right)$. Ce désaccord entre les mesures précessionnelles et gravifiques et les mesures géodésiques a paru pendant longtemps ne pouvoir être réduit. Cet échec

[1] Burnside, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1909, p. 71.

provenait de ce que l'accord n'était tenté que par des procédés de première approximation; M. R. Wavre a montré que le désaccord disparaît en seconde approximation, les deux catégories de mesures conduisant à une valeur proche de $h_1 = \frac{1}{294}$. Il faut ajouter que c'est là la valeur qui semble convenir le mieux à la théorie de la Lune.

En adoptant cet aplatissement de seconde approximation, et en conservant pour la suite l'équation de Clairaut:

$$\frac{d^2h}{dA^2} + \frac{2\rho A^2}{\int_0^A \rho A^2 dA} \cdot \frac{dh}{dA} + h\left(\frac{2\rho A}{\int_0^A \rho A^2 dA} - \frac{6}{A^2}\right) = 0$$

et l'hypothèse de Roche:

$$\rho = \rho_0(1 - \beta A^2) ,$$

j'ai obtenu une valeur numérique convenable $\rho_1 = 2{,}6$ de la densité superficielle moyenne de la Terre. Dans les équations précédentes, A est le rayon équatorial d'une couche de densité $\rho(A)$, et h est l'aplatissement de cette couche; β est un coefficient constant à déterminer. Le calcul conduit à la valeur $\beta = 0{,}740$; d'où on déduit

$$\rho_0 = 9{.}93 \qquad \text{et} \qquad \rho_1 = 2{,}6 \ ;$$

comme contrôle, on retrouve à la fin $h_1 = 0{,}003400$, soit $\frac{1}{294}$. Le fait que l'adoption des valeurs de seconde approximation de M. Wavre conduit à une valeur convenable de la densité superficielle moyenne de la Terre, alors que ce n'était pas le cas pour les solutions de première approximation, peut être considéré comme une preuve en faveur de la valeur $h_1 = \frac{1}{294}$.

Il est d'ailleurs curieux de constater que, malgré l'adoption officielle, par le congrès de Madrid, de l'aplatissement $\frac{1}{297}$, la plupart des instituts nationaux de géodésie ont continué à utiliser toute une série d'autres valeurs, comprises entre $\frac{1}{293}$ et $\frac{1}{310}$. Peut-être la solution $\frac{1}{294}$ aura-t-elle plus de chance d'être suivie ? Il semble, en tous cas, que les milieux géodésiques seraient bien inspirés de l'adopter effectivement.

6. — R. Wavre. — *Sur les relations permanentes de genre un dans un champ extérieur.* — Cette note ne vise qu'à indiquer que la méthode de la cavité s'étend au cas d'une masse fluide hétérogène en rotation,

soumise à l'attraction de corps extérieurs en plus de son attraction propre.

Il serait trop long de résumer ici cette méthode. Nous prions le lecteur de bien vouloir se référer à notre exposé synthétique donné au *Bulletin de la Société mathématique de France* (T. LVII, Fasc. III-IV, p. 222-251). Si la masse fluide se trouve dans un champ extérieur constant relativement aux axes en rotation, il suffit d'ajouter le potentiel du champ extérieur aux seconds membres des équations (6) et (18). Les propriétés caractéristiques des rotations permanentes de genre un ne sont pas altérées et le système fondamental (32) contiendra aux seconds membres les différents termes du développement du nouveau potentiel. Ainsi, la méthode de la cavité s'étend à ce que les Anglais appellent « The Tidal Problem » et aussi au problème des étoiles doubles. On peut aussi l'appliquer à la figure de la planète Saturne en tenant compte de l'anneau.

L'étude de ces différents cas est trop longue pour être exposée ici et je me contente de cette indication concernant la méthode.

7. — Gustave DUMAS (Lausanne). — *Sur la structure d'une surface analytique au voisinage d'un point donné.* — Soit

$$f(x\,,\,y\,,\,z) = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une surface analytique au voisinage du point O, de coordonnées $x = y = z = 0$. $f(x, y, z)$ est ainsi une série entière en x, y, z.

On suppose le pointO *singulier* pour la surface. La série, au premier membre de (1), ne contient, donc, ni terme constant, ni termes du premier degré.

On démontre alors, en se fondant sur la considération du polyèdre analytique de $f(x, y, z)$, qu'en général et à l'opposé de ce qui se passe en général pour les courbes, le *continuum* défini par (1) est *d'un seul tenant* au voisinage de O.

D'un autre côté, si l'on introduit la notion de *courbe nulle*, ou, ce qui revient au même, de *point fondamental*, on voit que le polyèdre permet de considérer un point singulier tel que O, comme constitué par une *superposition de courbes nulles en* O.

A chaque face du polyèdre correspondent une ou plusieurs courbes nulles. Ces faces les définissent aussi et définissent ce qu'on peut appeler leurs voisinages respectifs en O. Ces voisinages correspondant respectivement aux « *éléments complets de Weierstrass* » en O [1], *épuisent* dans leur ensemble *complètement la singularité.*

A chaque *arête* du polyèdre correspondent, d'autre part, toujours confondus en O, certains points que l'on doit regarder comme des

[1] *Actes du Congrès international de Bologne*, septembre 1928.

points d'intersection entre elles des courbes nulles relatives aux faces déterminant l'arête. Ces points forment la transition entre les voisinages des courbes nulles et fixent, par conséquent, le mode de *connexion* de la surface au voisinage de O.

Les substitutions introduites ailleurs [1], établissent ces différents faits et conduisent finalement à une représentation analytique complète de la surface en O. Elles donnent en particulier, chose essentielle, les *lignes singulières* issues, cas échéant de O.

Une théorie paraissant mettre en lumière les points principaux se trouve, de la sorte, esquissée dans les lignes qui précèdent. Cette théorie exige d'assez longs développements. Toutes choses égales, elle ne diffère pas sensiblement des théories relatives aux points singuliers des courbes planes [2]. Pour les surfaces, le polyèdre analytique paraît occuper la même place, avoir la même importance, que le polygone de Newton pour les courbes.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Notations différentielles.

1. — Je m'associe aux remarques judicieuses présentées par M. Winants (*L'Enseignement mathématique*, 28me année, 1929, p. 293) au sujet de la notion de différentielles. C'est en effet là un des points des mathématiques, où celui qui recherche des précisions ne trouve pas toujours, près des meilleurs auteurs même, les éclaircissements souhaités. Les prudentes recommandations quant au mode d'emploi des différentielles d'ordre supérieur, qui accompagnent généralement l'exposé, permettent sans doute de *calculer* correctement avec les différentielles; *le but de l'enseignement n'est pas cela seulement.* Il reste d'ailleurs le risque que sous les mêmes symboles tous ne voient pas la même chose, la crainte d'employer des symboles classiques en leur prêtant une signification qui ne soit pas reconnue par tous. Je ne crois pas rabaisser le débat en en faisant *une question de notations*; peut-être cette étude, où je n'innove pas quant au fond, justifiera-t-elle *les résultats* des expositions usuelles, sinon *le mode d'expression* de celles-ci.

---

[1] *Actes de la Soc. helv. des Sc. nat.*, Soleure, 1911, Altdorf, 1912, ainsi que *C. R.*, tomes 152 et 154.

[2] *Commentarii mathematici helvetici*, tome I, p. 120.