SUR LES DÉRIVÉES PAR RAPPORT AUX AFFINEURS

Autor(en): **Horak, Z.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22600

SUR LES DÉRIVÉES PAR RAPPORT AUX AFFINEURS

PAR

Z. HORAK.

Dans sa note *Sur la transformation des expressions différentielles*[1], M. HOSTINSKY a signalé une propriété intéressante d'une fonction dépendant des variables et de leurs dérivées premières par rapport à une variable auxiliaire. Cette propriété s'explique par le fait, que les dérivées partielles du second ordre d'une telle fonction par rapport aux dérivées des variables sont des composantes d'un tenseur covariant. Ce résultat-ci rend même possible de généraliser la géométrie de Riemann, en permettant de prendre pour l'élément linéaire une fonction quelconque des différentielles des paramètres[2]. Or, le résultat énoncé présente un cas particulier d'un théorème beaucoup plus général que nous allons établir.

Nous commençons par considérer une fonction scalaire φ des n paramètres x^{α} et des n composantes v^{α} d'un vecteur contrevariant et nous désignons par ψ ce que devient φ par une transformation de paramètres, leurs différentielles se changeant d'après la formule

$$dx^a = A^a_\alpha \, dx^\alpha ,$$

---

[1] *Comptes Rendus*, 182, 26, p. 508-510.

[2] Voir J. L. SYNGE: A generalization of the Riemannian line-element, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 27, 25, p. 61-67; J. H. TAYLOR: A generalization of Levi-Civita's parallelism and the Frenet formulas, *ibid.*, p. 246-264; L. BERWALD: Zur Geometrie ebener Variationsprobleme, *Lotos*, 74, 26, p. 43-52.

où les x^a signifient les paramètres nouveaux. Si l'on désigne de même par v^a les composantes du vecteur par rapport aux paramètres x^a, on aura

$$\varphi(v^\alpha) = \psi(v^a)\,, \qquad v^a = A^a_\alpha v^\alpha$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial v^a}\frac{\partial v^a}{\partial v^\alpha} = A^a_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial v^a}\,.$$

Alors ces dérivées sont des composantes d'un vecteur covariant que nous appellerons *dérivée de φ par rapport au vecteur v^α*. De l'équation précédente, on tire en différentiant

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = A^a_\alpha A^b_\beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^a \partial v^b}$$

et en continuant de cette manière on obtient les résultats plus généraux: Les dérivées partielles d'ordre quelconque p d'une fonction scalaire par rapport aux composantes d'un vecteur contrevariant sont des composantes d'un tenseur covariant d'ordre p, appelé dérivée d'ordre p par rapport au vecteur. Par analogie, la dérivée d'ordre p d'un scalaire par rapport à un vecteur covariant est un tenseur contrevariant d'ordre p.

De même pour un vecteur qui dépend des composantes d'un autre vecteur on peut déduire les dérivées par rapport à ce vecteur-ci et il est aisé d'avoir le résultat suivant: La dérivée d'ordre p d'un vecteur par rapport à un autre vecteur est un affineur d'ordre $1 + p$.

Par un raisonnement simple on étend les résultats précédents même pour le cas de deux affineurs les plus généraux, de façon qu'on peut énoncer le théorème suivant:

Les dérivées partielles d'ordre p *des composantes d'un affineur quelconque* Q *d'ordre* q *par rapport aux composantes d'un autre affineur* R *d'ordre* r *sont des composantes d'un affineur d'ordre* q + pr, *appelé dérivée de l'affineur* Q *par rapport à l'affineur* R.

Le théorème que nous venons d'énoncer reste valable même quand certains ou tous les nombres p, q, r deviennent nuls. Le nombre des indices covariants de la dérivée en question égale celui des indices covariants de Q élevé du nombre des indices contrevariants de R multiplié par p. En échangeant les mots contre- et covariant,on obtient le nombre des indices contre-variants.

On sait que les coefficients d'une transformation linéaire des vecteurs sont des composantes d'un affineur. Par analogie, on déduit, en vertu du théorème ci-dessus, d'une transformation *quelconque* d'un vecteur, un affineur du second ordre, c'est-à-dire la dérivée du vecteur transformé par rapport au vecteur primitif. Le déterminant des composantes de cet affineur est identique au déterminant fonctionnel de la transformation et alors le rang de la dérivée est égal à celui du jacobien.

Pour donner une application bien simple de nos théorèmes, remarquons, qu'en partant du carré de la grandeur d'un vecteur

$$v^2 = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = v_\alpha v^\alpha$$

on arrive aux relations suivantes

$$\frac{\partial v^2}{\partial v^\alpha} = v_\alpha , \quad \frac{\partial v^2}{\partial v_\alpha} = v^\alpha , \quad \frac{\partial^2 v^2}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} = g_{\alpha\beta} , \quad \frac{\partial^2 v^2}{\partial v_\alpha \partial v_\beta} = g^{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial v^\beta} = g_{\alpha\beta} , \quad \frac{\partial v^\alpha}{\partial v_\beta} = g^{\alpha\beta} .$$

Alors la métrique quadratique peut être caractérisée d'une manière invariante en posant le tenseur $\dfrac{\partial^3 v^2}{\partial v^\alpha \partial v^\beta \partial v^\gamma}$ égal à zéro.

Tous les résultats précédents restent valables encore pour les composantes par rapport aux paramètres non holonomes et de même dans le cas d'une variété non holonome.