2. — Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

si les cônes S_1 et S_2 sont égaux, une hyperbole de foyers F_2 et F_3 si les cônes S_2 et S_3 sont égaux et de foyers F_3 et F_1 si les cônes S_3 et S_1 sont égaux.

2. — *Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale.*

Soient P et P′ les projections sur le plan horizontal et sur le plan V d'un point quelconque de la courbe d'intersection des trois cônes, et π, S'_1, S'_2, S'_3 les projections de ce point et des trois sommets sur un axe vertical pour lequel nous choisissons un sens positif XX′. Soient v_1, v_2, v_3 les segments $\pi S'_1$, $\pi S'_2$, $\pi S'_3$ et h_1, h_2, h_3 les segments $S'_2 S'_3$, $S'_3 S'_1$, $S'_1 S'_2$. La relation de Chasles, appliquée successivement aux points S'_1, S'_2, S'_3; π, S'_1, S'_2; π, S'_2, S'_3; π, S'_3, S'_1, nous donne

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \tag{1}$$

$$v_1 + h_3 - v_2 = 0 \tag{2}$$

$$v_2 + h_1 - v_3 = 0 \tag{3}$$

$$v_3 + h_2 - v_1 = 0 \,. \tag{4}$$

Multiplions respectivement (2) et (3) par h_1 et par $(-h_3)$ et ajoutons membre à membre; il vient

$$v_1 h_1 - v_2 (h_1 + h_3) + v_3 h_3 = 0$$

ou, en vertu de (1)

$$v_1 h_1 + v_2 h_2 + v_3 h_3 = 0 \;{}^{1} \tag{5}$$

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les distances du point P aux trois foyers F_1, F_2, F_3 et λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs au signe près des cotangentes des demi-angles au sommet des trois cônes. Convenons de donner à λ_1, λ_2, λ_3 les signes respectifs de v_1, v_2, v_3, nous aurons

$$v_1 = \lambda_1 \rho_1 \qquad v_2 = \lambda_2 \rho_2 \qquad v_3 = \lambda_3 \rho_3$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant toujours positifs.

---

[1] En exprimant h_1, h_2, h_3 en fonction de v_1, v_2, v_3, on a

$$v_1 (v_3 - v_2) + v_2 (v_1 - v_3) + v_3 (v_2 - v_1) = 0 \,.$$

Etant données trois segments de même origine portés sur un même axe, la somme algébrique des produits de chacun d'eux par la différence des deux autres est nulle, puisque, dans cette somme, chaque produit de deux segments intervient deux fois et avec des signes contraires.

En y remplaçant ρ_1, ρ_2, ρ_3 par ces valeurs, les relations (2), (3), (4) et (5) deviennent

$$\lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2 + h_3 = 0 \ . \quad \lambda_2\rho_2 - \lambda_3\rho_3 + h_1 = 0 \ , \quad \lambda_3\rho_3 - \lambda_1\rho_1 + h_2 = 0 \ .$$

$$h_1\lambda_1\rho_1 + h_2\lambda_2\rho_2 + h_3\lambda_3\rho_3 = 0 \ .$$

Ce sont les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale de Descartes, rapportées à ses foyers.

Si nous remarquons que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$, nous voyons que l'équation bipolaire étant rapportée aux deux foyers intérieurs F_1 et F_2, le foyer extérieur F_3 est du côté du foyer intérieur pour lequel le coefficient du rayon vecteur a la plus petite valeur absolue et que l'équation bipolaire étant rapportée à un foyer intérieur et au foyer extérieur, le rayon vecteur correspondant à ce dernier est affecté du coefficient le plus petit en valeur absolue.

Sur une équation bipolaire $\lambda\rho + \lambda'\rho' - k = 0$, il est facile de voir si les deux foyers auxquels elle est rapportée sont ou non de même nature. Remplaçons-y successivement ρ et ρ' par les rayons vecteurs $(0, 2b)$ et $(2b, 0)$ qui correspondent aux deux foyers: si $2b\lambda' - k$ et $2b\lambda - k$ ont le même signe les deux foyers sont intérieurs; dans le cas contraire, un des deux foyers est intérieur, l'autre est extérieur.

Nous avons (fig. 1) $h_1 < 0$, $h_2 > 0$, $h_3 < 0$ et pour l'ovale intérieure $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 < 0$; pour l'ovale extérieure, $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\lambda_3 > 0$.

Si nous désignons par k, λ et λ' des quantités essentiellement positives, et si nous supposons $\lambda' > \lambda$, le tableau suivant nous indique les formes que prennent les équations des deux ovales conjuguées suivant les foyers auxquelles elles sont rapportées.

Foyers	Ovale intérieure	Ovale extérieure
F_1 F_2	$\lambda\rho + \lambda'\rho' = k$	$\lambda'\rho' - \lambda\rho = k$
F_2 F_3	$\lambda\rho - \lambda'\rho' = k$	$\lambda'\rho' - \lambda\rho = k$
F_3 F_1	$\lambda\rho + \lambda'\rho' = k$	$\lambda'\rho' - \lambda\rho = k$.

Ce tableau montre également comment on passe d'une équation de l'ovale à celle de l'ovale conjuguée rapportée aux deux mêmes foyers.

Etant donnée une équation bipolaire, quand on a calculé la position du troisième foyer, on peut calculer les h.

Connaissant la position de deux foyers, il est aisé de trouver la position des sommets. Désignons par a_f (f étant égal à 1, 2 ou 3) a'_f, b_f, b'_f les distances respectives du foyer F_f aux sommets A_1, A_2, B_1, B_2 des deux ovales conjuguées, et supposons, par exemple, l'ovale donnée par l'équation bipolaire $\lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2 + h_3 = 0$. Exprimant que le sommet A_1 est sur la courbe nous avons $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 + h_3 = 0$. Si nous appelons $2b$ la distance des deux foyers F_1F_2, $a_2 = a_1 + 2b$ et la relation précédente devient $\lambda_1 a_1 - \lambda_2(a_1 + 2b) + h_3 = 0$, d'où nous pouvons tirer a_1.

D'autre part,

$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = \lambda_2 a'_2 - \lambda_3 a'_3 = -h_1 .$$

D'où $\lambda_3(a_3 - a_3) = \lambda_2(a_2 - a'_2)$, relation qui nous fait connaître λ_3. On pourrait, connaissant h_3 et h_1 avoir h_2 par la relation $h_1 + h_2 + h_3 = 0$. Ainsi une des équations bipolaires d'une ovale étant donnée, nous pouvons trouver les deux autres équations bipolaires et l'équation tripolaire. Si l'ovale est donnée par ses trois foyers et son équation tripolaire, nous pouvons déterminer ses deux sommets et trouver ses équations bipolaires.

D'après le tableau qui précède, l'équation $\lambda\rho - \lambda'\rho' = k$ représente toujours une ovale intérieure rapportée aux foyers F_2 et F_3. Les autres formes d'équations bipolaires indiquent simplement que l'ovale est intérieure ou extérieure. Pour savoir à quels foyers elle est rapportée, il convient de chercher la position de ses sommets et celle du point milieu 0 de l'intervalle qui les sépare: la disposition des deux foyers connus par rapport à 0, fait voir si ce sont F_1, F_2 ou F_3.

3. — *L'ovale courbe anallagmatique.*

Si on prend pour pôle un quelconque des trois foyers et pour axe la droite $F_1F_2F_3$, l'équation de l'ovale en coordonnées polaires ρ et θ se présente sous la forme $\rho^2 + P\rho + Q = 0$, P étant une fonction linéaire de cos θ et Q une constante. La transformation par rayons vecteurs réciproques autour du pôle