Cas d'une équation de Pfaff.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

dratique χ peuvent être reliés à ceux de formes linéaires. On peut, en effet, écrire, avec les notations des nos 14 et 15

$$\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2 \equiv \varpi^2 + \chi_0 \qquad \chi_0 \equiv 2M_0\, du\, dv \tag{33}$$

mais si la conservation du système de formes ϖ_1, ϖ_2, entraîne celle de χ, l'inverse n'a pas lieu; par suite, les invariants de χ sont des invariants du système ϖ_1, ϖ_2, la réciproque n'étant généralement pas vraie. On vérifiera ainsi les relations

$$\mu = \frac{(\varepsilon + \zeta)^2}{4\varepsilon\zeta} \qquad \text{(notations du n° 14)}$$

$l = a$, $n = b$, donc $\lambda = \alpha$, $\nu = \beta$ (notations du n° 15), etc.

On peut d'ailleurs profiter de l'arbitraire de la décomposition $\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2$ pour imposer aux formes linéaires ϖ_1 et ϖ_2 une relation invariante assurant l'identité des systèmes d'invariants de χ d'une part, ϖ_1 et ϖ_2 d'autre part, en *normant* convenablement ces dernières formes sans porter atteinte à la généralité de χ, ce qui est du reste possible de différentes façons, par exemple avec $\varepsilon + \zeta = 1$, ou $\varepsilon\zeta = 1$. On est ainsi ramené à l'étude d'un système *particulier* de formes linéaires.

En utilisant au contraire la relation $\chi \equiv \varpi^2 + \chi_0$ (où il y a seulement deux choix possibles pour la forme χ_0), on se ramène à l'étude d'un système formé par une forme ϖ générale et une forme quadratique particulière χ_0.

Cas d'une équation de Pfaff.

18. — Soit seulement à conserver l'*équation*

$$\varpi \equiv A(u, v)\, du + B(u, v)\, dv = 0 \tag{34}$$

ce qui astreint les coefficients à la condition

$$\frac{\delta A - A\xi'}{A} = \frac{\delta B - B\eta'}{B}. \tag{35}$$

Ecartons d'abord les équations invariantes $A = 0$, $B = 0$, et posons

$$A = e^a \qquad B = e^b \qquad C = \frac{A}{B} = e^c \qquad a - b = c$$

On devra prévoir $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ invariants jusqu'à l'ordre n, dont $n-1$ nouveaux invariants d'ordre n, pour $n > 2$. Pour les premiers ordres, écrivons

$$\delta c = \xi' - \eta' \qquad [IV, 0]$$

$$\delta c_{10} = c_{10}\xi' + \xi'' \qquad \delta c_{01} = c_{01}\eta' - \eta'' \qquad [IV, 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta c_{20} = 2c_{20}\xi' + c_{10}\xi'' + \xi''' & \delta c_{02} = 2c_{02}\eta' + c_{01}\eta'' - \eta''' \\ & \delta c_{11} = c_{11}(\xi' + \eta') \end{array} \right. \qquad [IV, 2]$$

c_{11} est donc invariant relatif de poids (-1); si $c_{11} \neq 0$, posons

$$c_{11} = e^g \qquad \frac{g+c}{2} = h \qquad \frac{g-c}{2} = k \qquad (36)$$

et substituons à l'équation [IV, 0] et à la dernière équation [IV, 2] les suivantes

$$\delta h = \xi' \qquad \delta k = \eta' \qquad [IV, 2']$$

Pour le troisième ordre, nous avons à former quatre nouvelles équations; nous en écrirons six, en δc_{30}, δc_{03}, δh_{10}, δk_{01}, δk_{10}, δh_{01}, celles en δh_{10} et δk_{01} remplaçant les équations [IV, 1]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta c_{30} = \ldots\ldots + \xi^{IV} & \delta c_{03} = \ldots\ldots - \eta^{IV} \\ \delta h_{10} = h_{10}\xi' + \xi'' & \delta k_{01} = k_{01}\eta' + \eta'' \\ \delta k_{10} = k_{10}\xi' & \delta h_{01} = h_{01}\eta' \end{array} \right. \qquad [IV, 3]$$

19. — Si les invariants relatifs k_{10} et h_{01} ne sont pas nuls, on obtient les deux invariants du troisième ordre

$$\alpha^* = k_{10}e^{-h} \qquad \beta^* = h_{01}e^{-k} \qquad (37)$$

et les équations $\delta\alpha^* = 0$, $\delta\beta^* = 0$, pourront remplacer dans la suite les équations en δk_{10} et δh_{01}, de sorte que l'on pourra continuer comme au n° 6, par l'emploi régulier de paramètres différentiels

$$\vartheta_u f = f_{10}e^{-h} \qquad \vartheta_v f = f_{01}e^{-k} \qquad (38)$$

pour lesquels on devra cependant tenir compte des relations (36), soit, entre h et k

$$h_{11} - k_{11} = e^{(h+k)} \qquad (39)$$

Les quatre invariants obtenus comme paramètres différentiels de α^* et β^*

$$\omega^* = \alpha^*_{10} e^{-h} \qquad 0^* = \beta^*_{10} e^{-h} \qquad \varphi^* = \alpha^*_{01} e^{-k} \qquad \psi^* = \beta^*_{01} e^{-k} \tag{40}$$

ne sont pas distincts, car

$$0^* = h_{11}\, e^{-(h+k)} - \alpha^* \beta^* \qquad \varphi^* = k_{11} e^{-(h+k)} - \alpha^* \beta^*$$
$$0^* - \varphi^* = 1 \tag{41}$$

Comme l'on a

$$\left.\begin{array}{l} \vartheta_u \vartheta_v f = f_{11}\, e^{-g} - \alpha^* \vartheta_v f \qquad \vartheta_v \vartheta_u f = f_{11} e^{-g} - \beta^* \vartheta_u f \\ (\vartheta_u \vartheta_v) f = \beta^* \vartheta_u f - \alpha^* \vartheta_v f \end{array}\right. \tag{42}$$

on peut encore introduire

$$\vartheta_{uv} f = f_{11}\, e^{-g} \tag{43}$$

$$\gamma^* = \vartheta_{uv} g = g_{11} e^{-g} = 0^* + \varphi^* + 2\alpha^* \beta^* \tag{44}$$

et prendre ω^*, γ^*, ψ^* comme invariants distincts d'ordre 4

$$\omega^* = \vartheta_u \alpha^* \qquad \gamma^* = \vartheta_{uv} g \qquad \psi^* = \vartheta_v \beta^* \tag{45}$$

et pour l'ordre 5, on pourra choisir $\vartheta_u^2 \alpha^*$, $\vartheta_u \gamma^*$, $\vartheta_v \gamma^*$, $\vartheta_u^2 \beta^*$.

Dans le cas général, les invariants α^* et β^* du troisième ordre sont essentiels, γ^* étant défini par (44).

20. — *Cas particuliers.* — Soit d'abord B = 0, par exemple: il n'y a aucune équation de condition, et l'équation $A\,du = 0$ ou $du = 0$ est conservée par une transformation Σ arbitraire; de même pour A = 0 et l'équation $dv = 0$. Si $c_{11} = 0$, il n'y a de nouveau aucun invariant; toute transformation Σ conserve l'équation qu'on peut écrire

$$\varpi \equiv A(u)\, du + B(v)\, dv = 0 \tag{46}$$

Passons aux équations invariantes $k_{10} = 0$, $h_{01} = 0$; en dehors du cas $c_{11} = 0$, elles ne peuvent être vérifiées simultanément. Supposons donc par exemple $k_{10} \neq 0$, $h_{01} = 0$; l'invariant α^* est essentiel, et les autres invariants s'en déduisent par le jeu des opérateurs différentiels.

Pour $h_{01} \neq 0$, $k_{10} = 0$, c'est β^* qui est l'invariant essentiel. Dans les deux derniers cas, on peut, par l'intégration d'une équation de Liouville [1], donner les formes-types correspondantes de l'équation $\varpi = 0$, qui sont

$$\begin{cases} \varpi \equiv (X - Y)^2 du + 2X'Y'Z\, dv = 0 & \text{pour } h_{01} = 0 \\ \varpi \equiv 2X'Y'W du + (X - Y)^2 dv = 0 & \text{pour } k_{10} = 0 \end{cases} \tag{47}$$

les fonctions X (u), Y (v), Z (u), W (v) étant des fonctions arbitraires de leurs arguments.

21. — *Conditions suffisantes.* — Pour le cas général, la discussion des conditions suffisantes, ou la recherche des invariants suffisants, se fait exactement comme aux nos 9 à 11, en utilisant α^*, β^*, ω^*, θ^*, φ^*, ψ^* à la place de α, β, ω, θ, φ, ψ; h et k étant de même substitués à a et b, les conditions

$$\delta\alpha^* = \delta\beta^* = \delta\omega^* = \delta\gamma^* = \delta\psi^* = 0 \tag{48}$$

assurent la conservation de la forme

$$\varpi^* \equiv e^h du + e^k dv \equiv e^{\frac{g}{2}}\left(e^{\frac{c}{2}} du + e^{-\frac{c}{2}} dv\right)$$

et par suite aussi de l'équation

$$\varpi \equiv A du + B dv \equiv B\left(e^c du + dv\right) = 0 \ ;$$

α^*, β^*, ω^*, γ^*, ψ^* sont alors les invariants suffisants, c'est-à-dire que, α^* et β^* étant indépendants, les fonctions

$$\omega^* = \Omega(\alpha^*, \beta^*) \qquad \gamma^* = \Gamma(\alpha^*, \beta^*) \qquad \psi^* = \Psi^*(\alpha^*, \beta^*) \tag{49}$$

doivent être les mêmes pour toute équation $\overline{\varpi} = 0$ équivalente (Σ) à $\varpi = 0$. Si α^* et β^* ne sont pas des fonctions indépendantes de u, v, c'est-à-dire si l'on a

$$\omega^*\psi^* - \theta^*\varphi^* \equiv \omega^*\psi^* - \frac{(\gamma^* - 2\alpha^*\beta^*)^2 - 1}{4} = 0$$

et si l'un des invariants ω^*, γ^*, ψ^* est une fonction de u, v distincte

---

[1] Une équation de Liouville a la forme $z_{11} = K_0 e^{-z}$ et pour intégrale $e^{-z} = \frac{2X'Y'}{K_0(X-Y)^2}$, K_0 étant une constante, X et Y des fonctions arbitraires de u et v respectivement.

de α^*, par exemple, on prolongera les invariants suffisants comme au n° 10, de façon à assurer la conservation de la forme ϖ^* par les transformations Σ. Le dernier cas possible est celui où ω^*, γ^*, ψ^* sont, comme β^*, et alors comme tous les invariants, des fonctions de α^*: ceci arrive maintenant dès qu'un des trois invariants précédents dépend de α^* seul.

22. — *Formes de Pfaff normales; constitution des invariants.* — Nous dirons qu'à la forme de Pfaff ϖ de l'équation $\varpi = 0$ correspond la forme ϖ^*, *normée* pour les transformations Σ

$$\varpi^* \equiv J\varpi \equiv A^* du + B^* dv \qquad A^* = e^h \qquad B^* = e^k \tag{50}$$

le facteur *normant* J étant donné par [1]

$$J = e^{\frac{g-a-b}{2}} = \sqrt{\frac{c_{11}}{AB}} = \sqrt{0 - \varphi} \left(\text{avec } c_{11} = \frac{C_{11}}{C} - \frac{C_{10} C_{01}}{C^2}, \ C = \frac{A}{B} \right). \tag{51}$$

Les invariants de l'équation $\varpi = 0$ sont ceux de la forme normale ϖ^*, caractérisée par la relation (39); or, si nous appelons *normale* une forme ϖ dont les invariants θ et φ du second ordre satisfont à la relation [2]

$$0 - \varphi = 1 \tag{52}$$

nous voyons qu'une forme normale se confond avec sa forme normée, puisqu'on a alors

$$c_{11} = a_{11} - b_{11} = e^{a+b} \qquad J = 1, \ h = a, \ k = b, \ g = a + b.$$

Nous pourrons donc dire « forme normale » au lieu de « forme normée » ϖ^*; l'introduction du facteur normant J, du second ordre, a pour effet d'élever de deux unités les ordres des invariants considérés aux n°s 6 et 7, et ce facteur introduit aussi des irrationnelles; mais la conservation d'une équation $\varpi = 0$ est ainsi ramenée à celle de la forme normale ϖ^*.

Les invariants et comitants formés et interprétés au n° 13 se rapportent maintenant à ϖ^* et à diverses formes linéaires,

---

[1] Un tel facteur normant n'est jamais défini qu'à un facteur constant près, et une légère modification d'une forme normée est parfois avantageuse.

[2] Cette relation peut s'exprimer au moyen de formes quadratiques extérieures déduites de $A du$, $B dv$, $\beta_{10} du$, $\alpha_{01} dv$, ou de ϖ et $\beta_{10} du + \alpha_{01} dv$; elle permet alors l'introduction d'une forme quadratique symétrique de différentielles.

quadratiques, etc., également normées par des facteurs convenables, ou à des équations correspondantes. On peut introduire ici un nouvel intermédiaire pour la formation des invariants; appelons invariant (ou comitant) *brisé* une expression s qu'une transformation Σ reproduit multipliée par $\left(\frac{U'}{V'}\right)^q$, le degré q de l'exposant étant le *calibre* de l'invariant brisé

$$\bar{s} = \left(\frac{U'}{V'}\right)^q s \qquad \delta s = -qs\,(\xi' - \eta') \tag{53}$$

Ces invariants brisés sont des rapports d'invariants relatifs (Σ_1) et (Σ_2) de poids q, et le rapport de deux invariants brisés de même calibre est un invariant absolu. Ainsi $C = \frac{A}{B}$ et $\frac{dv}{du}$ sont des invariant et comitant brisés de calibre (-1), donc $\frac{A\,du}{B\,dv} = \frac{A^*\,du}{B^*\,dv}$ est un invariant absolu; des relations entre formes équivalentes

$$\frac{\bar{A}U'}{A} = \frac{\bar{B}V'}{B} = \frac{\bar{\varpi}}{\varpi} \qquad c_{(11)}\,U'V' = c_{11} \tag{54}$$

on tire

$$\frac{c_{11}}{AB}\,\varpi^2 = \frac{\bar{c}_{(11)}}{\bar{A}\bar{B}}\,\bar{\varpi}^2 \tag{55}$$

mettant en évidence le facteur normant J; d'autres invariants relatifs de poids (-1) remplaçant c_{11} donneraient d'autres formes normées.

A partir d'invariants f, g, les invariants brisés $\frac{f_{10}}{f_{01}}$, $\frac{f_{10}}{g_{01}}$, etc. serviront à la construction de nouveaux invariants et de formes ou d'équations différentielles invariantes.

Plutôt que les invariants formés précédemment, on aura souvent à utiliser des combinaisons telles que $\alpha^*\beta^*$, $\frac{\alpha^*}{\beta_*}$, etc., et des invariants rationnels; ces derniers ne peuvent complètement remplacer ceux employés dans les conditions d'équivalence.

23. — *Formes et équations réduites.* — Les relations entre invariants d'une équation $\varpi = 0$, ou les équations invariantes attachées à la précédente, donnent à celle-ci une forme type qu'on peut parfois obtenir explicitement (il en est de même pour

les formes différentielles et les équations de degré quelconque); une transformation Σ permet de ramener alors l'équation à une forme réduite (généralement par modification des invariants relatifs ou brisés), dont l'intégration entraîne celle des équations équivalentes; plusieurs formes réduites peuvent d'ailleurs correspondre à un même type.

Nous avons déjà rencontré, au n° 20, certains types d'équations dont les réduites sont faciles à former; les premiers correspondent respectivement aux intégrales $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, $\int A(u)\,du + B(v)\,dv = \text{const.}$ Nous avons indiqué aussi que pour $\alpha = \beta$, l'équation $\varpi \equiv \mu\, d\lambda = 0$ se réduit à une forme $d\lambda = 0$; on formerait facilement aussi les relations entre les invariants de formes ϖ et $m\varpi$, ϖ et ϖ^* en particulier.

Signalons encore quelques formes remarquables; remarquons d'abord que pour des formes ϖ de même invariant relatif c_{11}, le coefficient $C = \frac{A}{B}$ est déterminé à un facteur arbitraire près $\frac{X(u)}{Y(v)}$; le cas $c_{11} = 0$, déjà étudié, donne un type invariant d'équation $\varpi = 0$.

Soit maintenant $\gamma^* \equiv g_{11}\, e^{-g} = 0$; comme $g = \log c_{11}$, c_{11} sera le produit d'une fonction arbitraire de u par une fonction arbitraire de v, et l'on obtiendra par intégration

$$C = \frac{X(u)}{Y(v)}\, e^{Z(u)W(v)} \tag{56}$$

X, Y, Z, W étant des fonctions arbitraires de leurs arguments; d'où la forme-type

$$\varpi \equiv X(u)\, e^{Z(u)W(v)}\, du + Y(v)\, dv = 0 \tag{57}$$

et la forme réduite

$$\varpi \equiv e^{Z(u)W(v)}\, du + dv = 0 \tag{57'}$$

Soit encore $\gamma^* = -K_0$, constante différente de zéro; l'intégration de l'équation de Liouville $-g_{11} = K_0\, e^g$ donne l'intégrale

$$c_{11} \equiv e^g = \frac{2Z'W'}{K_0(Z - W)^2} \qquad Z = Z(u) \qquad W = W(v)$$

mais l'on a alors

$$c_{11} + \frac{\varphi_{11}}{K_0} = 0$$

d'où l'intégrale particulière $c + \frac{\varphi}{K_0}$ et par suite

$$C = \frac{X(u)}{Y(v)} e^{-\frac{\varphi}{K_0}} = \frac{X}{Y} \left\{ \frac{K_0 (Z - W)^2}{2Z' W'} \right\}^{\frac{1}{K_0}} \qquad (58)$$

ce qui donne la forme type $\varpi = 0$ [1].

24. — *Equivalences* (Σ_i) *et* (Σ_g). — Des formes ϖ et ϖ_i, ou les équations $\varpi = 0$, $\varpi_i = 0$, étant équivalentes (Σ_i), il suffit de la transformation Σ_i particulière

$$u_i = \bar{v} \qquad v_i = \bar{u} \qquad (\Sigma_0)$$

pour passer de ϖ_i à une forme $\bar{\varpi}$ équivalente (Σ) à ϖ; de même pour les équations. En posant

$$\bar{A}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u} + \bar{B}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v} \equiv A_i(u_i, v_i)\, du_i + B_i(u_i, v_i)\, dv_i$$

on aura (l'indice i caractérisant les expressions attachées à ϖ_i)

$$A_i = \bar{B} \qquad B_i = \bar{A} \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f_i}{\partial v_i}, \text{ etc.} \qquad \text{pour} \qquad f_i(u_i, v_i) \equiv \bar{f}(\bar{u}, \bar{v})$$

Aux invariants (Σ) de $\bar{\varpi}$ correspondent pour ϖ_i des expressions

---

[1] On sait que l'intégrale d'une équation de Liouville, écrite sous la forme $z_{11} e^{-z} = -K_0$, a été obtenue en partant d'un $ds^2 = 2e^z\, du\, dv$ à courbure constante K_0; de même le ds^2 de révolution pouvant être ramené à la forme réduite $2\Phi(u+v)\, du\, dv$ ou à la forme type $2\Phi(X+Y)\, X'Y'\, du\, dv$, Φ, $X(u)$, $Y(v)$ étant des fonctions arbitraires, on se trouve alors dans le cas où tous les invariants du ds^2 dépendent d'un seul. Ceci indique que la forme type

$$\varpi = F(X+Y)\, X'\, du + G(X+Y).\, Y'\, dv$$

avec F et G fonctions arbitraires, ou la forme réduite

$$\varpi = F(u+v)\, du + G(u+v)\, dv$$

correspondent au cas général où les invariants de la forme ϖ, ou ceux de l'équation $\varpi = 0$, sont fonctions d'un seul de ces invariants. Supposons en effet un invariant f tel que l'invariant $\frac{f_{11}}{f_{10} f_{01}}$ existe et soit fonction de f; f est alors fonction d'une expression du type $X(u) + Y(v)$, ou encore $X+Y$ est un invariant, dont tout autre invariant est fonction dans le cas considéré; et on en déduit aussitôt la forme des invariants relatifs (Σ_1) et (Σ_2). On sait dans ce cas intégrer l'équation $\varpi = 0$ en prenant pour variables $u+v$ et $u-v$.

faciles à former. Bornons-nous au cas des équations de Pfaff équivalentes (Σ_i); en posant $\sqrt{-1} = i$, et suivant une même détermination, on trouve

$$c_i = -\bar{c}\,,\ g_i = \bar{g} + i\pi\,,\ h_i = \bar{k} + i\frac{\pi}{2}\,,\ k_i = \bar{h} + i\frac{\pi}{2}\,,\ \alpha_i^* = -i\bar{\beta}^*\,,\ \beta_i^* = -i\bar{\alpha}^*\,,$$

etc.

Les équations $\varpi = 0$, $\varpi_i = 0$, équivalentes (Σ_i), correspondent donc aux relations

$$\alpha_i^* = -i\beta^*\,,\ \beta_i^* = -i\alpha^*\,,\ \omega_i^* = -\psi^*\,,\ \gamma_i^* = -\gamma^*\,,\ \psi_i^* = -\omega^*\,,\ \text{etc.,} \tag{59}$$

et dans le cas général (α^* et β^* fonctions indépendantes de u, v) les conditions écrites sont suffisantes. On voit aussi que, dans ce cas, deux équations de Pfaff ne peuvent être simultanément équivalentes (Σ) et (Σ_i): il faudrait en effet $\alpha^* = \beta^* = 0$, et on retombe alors sur le cas $c_{11} = 0$, où la chose est possible.

Les conditions d'équivalence (Σ_g) comportent le choix entre les équivalences (Σ) et (Σ_i); avec $\varepsilon = \pm 1$, on peut les écrire, pour deux formes ϖ et ϖ_g

$$\begin{cases} \alpha_g^* + i\beta_g^* = \alpha^* + \varepsilon i\beta^* & \beta_g^* + i\alpha_g^* = \beta^* + \varepsilon i\alpha^* \\ \omega_g^* + \psi_g^* = \varepsilon(\omega^* + \psi^*) & \omega_g^* - \psi_g^* = \omega^* - \psi^* \qquad \gamma_g^* = \varepsilon\gamma^*\,,\ \text{etc.} \end{cases} \tag{60}$$

Deux équations de Pfaff.

25. — Soit à conserver, par les transformations Σ, l'ensemble des deux équations

$$\varpi_1 = 0 \qquad \varpi_2 = 0 \tag{61}$$

les notations étant celles du n° 14. Ici encore, on peut assurer d'abord la conservation d'une des équations $\varpi_1 = 0$, puis lui rattacher celle de l'autre $\varpi_2 = 0$; on part alors, dans le cas général, des conditions

$$\delta c_1 = \xi' - \eta' \qquad \delta(c_1 - c_2) = 0$$

On prévoit $n(n+1)$ invariants distincts jusqu'à l'ordre n, et en général $2n$ nouveaux invariants d'ordre n; mais jusqu'à l'ordre n, il y a $(n+1)(n-2)$ invariants propres des deux