

# forme quadratique.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

c'est-à-dire par des *conditions moins nombreuses et d'ordre moins élevé* qu'au n° 14; cet exemple montre l'intérêt qu'il y a, dans chaque cas, à reprendre la discussion sur les données particulières au problème proposé.

UNE FORME QUADRATIQUE.

16. — Imposons-nous maintenant la conservation de la forme

$$\chi \equiv Ldu^2 + 2Mdu\,dv + Ndv^2 \tag{26}$$

Nous indiquerons seulement les grandes lignes de la méthode, sans discuter les cas particuliers. Les coefficients L, M, N sont astreints aux variations

$$\delta L = 2L\xi' \quad \delta M = M(\xi' + \eta') \quad \delta N = 2N\eta' \tag{27}$$

Il y a à prévoir  $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$  invariants jusqu'à l'ordre  $n$ , dont  $3n+1$  nouveaux pour cet ordre. On reconnaît en L, M, N des invariants relatifs: L et N sont  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  de poids  $(-2)$ , M est  $(\Sigma)$  de poids  $(-1)$ ; si les équations  $L = 0, M = 0, N = 0$ , ne sont pas satisfaites, ils fourniront l'invariant d'ordre zéro. En posant

$$\begin{aligned} L &= e^{2l} & M &= e^m & N &= e^{2n} \\ \delta l &= \xi' & \delta m &= \xi' + \eta' & \delta n &= \eta' \end{aligned} \tag{III, 0}$$

nous prendrons pour invariant d'ordre zéro

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{M^2}{LN} \tag{28}$$

et substituerons à la seconde équation [III, 0]

$$\delta\mu = 0 \tag{III, 0'}$$

Dès ce moment, les équations dérivées fourniront régulièrement les invariants

$$\left\{ \begin{aligned} \delta l_{10} &= l_{10}\xi' + \xi'' & \delta n_{01} &= n_{01}\eta' + \eta'' \\ \delta n_{10} &= n_{10}\xi' & \delta l_{01} &= l_{01}\eta' \\ \delta\mu_{10} &= \mu_{10}\xi' & \delta\mu_{01} &= \mu_{01}\eta' \end{aligned} \right. \tag{III, 1}$$

donnant pour le premier ordre

$$\lambda = n_{10} e^{-l} \quad \nu = l_{01} e^{-n} \quad \rho = \mu_{10} e^{-l} \quad \sigma = \mu_{01} e^{-n} \quad (29)$$

et mettant en évidence les paramètres différentiels<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_u f &= f_{10} e^{-l} & \mathfrak{D}_\nu f &= f_{01} e^{-n} \\ \lambda &= \mathfrak{D}_u n & \nu &= \mathfrak{D}_\nu l & \rho &= \mathfrak{D}_u \mu & \sigma &= \mathfrak{D}_\nu \mu \end{aligned} \quad (30)$$

Pour continuer, on substituerait aux quatre dernières équations [III, 1]

$$\delta\lambda = 0 \quad \delta\nu = 0 \quad \delta\rho = 0 \quad \delta\sigma = 0 \quad [\text{III}, 1']$$

et on tiendrait compte des relations introduites par

$$\begin{aligned} (\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_\nu) f &= \nu \mathfrak{D}_u f - \lambda \mathfrak{D}_\nu f \\ (\mathfrak{D}_u \mathfrak{D}_\nu) \mu &= \nu \rho - \lambda \sigma \end{aligned} \quad (31)$$

On pourra encore introduire le paramètre différentiel du second ordre

$$\mathfrak{D}_{uv} f = f_{11} e^{-(l+n)} \quad (32)$$

et prendre pour invariants distincts d'ordre 2

$$\mathfrak{D}_u \lambda, \mathfrak{D}_\nu \lambda, \mathfrak{D}_u \nu, \mathfrak{D}_\nu \nu, \mathfrak{D}_u \rho = \mathfrak{D}_u^2 \mu, \mathfrak{D}_\nu \sigma = \mathfrak{D}_\nu^2 \mu, \mathfrak{D}_{uv} \mu.$$

Les invariants  $\mu, \lambda, \nu$  sont essentiels; dans le cas général, des invariants suffisants seront donnés par  $\mu, \lambda, \nu, \mathfrak{D}_u \lambda, \mathfrak{D}_\nu \lambda, \mathfrak{D}_u \nu, \mathfrak{D}_\nu \nu$ .

17. — Un cas particulier intéressant, celui des formes  $\chi_0$ , pour lesquelles  $L = N = 0$ , a été étudiée complètement par M. A. Tresse (*loc. cit.*, p. 54); en procédant un peu différemment, nous introduirions, après les invariants d'ordres 2 et 3:  $z = m_{11} e^{-m}$ ,  $\iota = z_{10} z_{01} e^{-m}$ , les deux paramètres différentiels  $\frac{f_{10}}{z_{10}}$  et  $\frac{f_{01}}{z_{01}}$ ; d'où les invariants d'ordre 4:  $\frac{l'_{10}}{z_{10}}, \frac{l'_{01}}{z_{01}}, \frac{z_{11}}{z_{10} z_{01}}$ , etc.

Il reste à indiquer comment les invariants d'une forme qua-

<sup>1</sup> Nous avons, dans les divers cas étudiés, conservé la même notation pour les paramètres différentiels  $\mathfrak{D}_u f, \mathfrak{D}_\nu f$ , sans que ces expressions soient les mêmes dans ces différents cas.

dratique  $\chi$  peuvent être reliés à ceux de formes linéaires. On peut, en effet, écrire, avec les notations des nos 14 et 15

$$\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2 \equiv \varpi^2 + \chi_0 \quad \chi_0 \equiv 2M_0 du dv \quad (33)$$

mais si la conservation du système de formes  $\varpi_1, \varpi_2$ , entraîne celle de  $\chi$ , l'inverse n'a pas lieu; par suite, les invariants de  $\chi$  sont des invariants du système  $\varpi_1, \varpi_2$ , la réciproque n'étant généralement pas vraie. On vérifiera ainsi les relations

$$\mu = \frac{(\varepsilon + \zeta)^2}{4\varepsilon\zeta} \quad (\text{notations du n}^\circ 14)$$

$l = a, n = b$ , donc  $\lambda = \alpha, \nu = \beta$  (notations du n<sup>o</sup> 15), etc.

On peut d'ailleurs profiter de l'arbitraire de la décomposition  $\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2$  pour imposer aux formes linéaires  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  une relation invariante assurant l'identité des systèmes d'invariants de  $\chi$  d'une part,  $\varpi_1$  et  $\varpi_2$  d'autre part, en *normant* convenablement ces dernières formes sans porter atteinte à la généralité de  $\chi$ , ce qui est du reste possible de différentes façons, par exemple avec  $\varepsilon + \zeta = 1$ , ou  $\varepsilon\zeta = 1$ . On est ainsi ramené à l'étude d'un système *particulier* de formes linéaires.

En utilisant au contraire la relation  $\chi \equiv \varpi^2 + \chi_0$  (où il y a seulement deux choix possibles pour la forme  $\chi_0$ ), on se ramène à l'étude d'un système formé par une forme  $\varpi$  générale et une forme quadratique particulière  $\chi_0$ .

#### CAS D'UNE ÉQUATION DE PFAFF.

18. — Soit seulement à conserver l'équation

$$\varpi \equiv A(u, v) du + B(u, v) dv = 0 \quad (34)$$

ce qui astreint les coefficients à la condition

$$\frac{\delta A - A \xi'}{A} = \frac{\delta B - B \eta'}{B} \quad (35)$$

Ecartons d'abord les équations invariantes  $A = 0, B = 0$ , et posons

$$A = e^a \quad B = e^b \quad C = \frac{A}{B} = e^c \quad a - b = c$$