Introduction.

EQUIVALENCES DE FORMES ET D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

PAR

P. C. DELENS (Le Hâvre)

INTRODUCTION.

1. — Nous avons, dans un précédent numéro de cette revue [1], posé la question de la classification des familles de courbes sur les surfaces, ou des équations différentielles qui les représentent, vis-à-vis des transformations conformes. C'est là un problème de représentation conforme qui peut se traiter en mettant en évidence les paramètres des lignes minima $du = 0$, $dv = 0$, par suite un problème d'équivalence vis-à-vis des transformations à variables séparées

$$\bar{u} = U(u) \qquad \bar{v} = V(v) \; . \tag{Σ}$$

Mais il nous a paru nécessaire de considérer d'abord ce problème d'équivalence du point de vue purement analytique et d'étudier la conservation de certaines formes et équations différentielles par ces transformations Σ; c'est l'objet de la présente étude, les applications géométriques étant réservées pour un Mémoire ultérieur; nous avons cependant particulièrement insisté sur les points qui semblaient présenter le plus d'intérêt en vue de ces applications.

Les formes et équations différentielles que nous avons considérées sont du premier ordre, et nous nous sommes limité ici à

---

[1] *Trajectoires orthogonales et ombilics*, *E. M.*, 25me année, 1926, p. 120; Note publiée à l'occasion d'un article antérieur de M. WINANTS.

des formes et équations de Pfaff, ou de Monge quadratiques. Nous avons envisagé, pour un certain nombre de cas, généraux ou particuliers, la formation des invariants (Σ) et les conditions d'équivalence.

Pour une forme de Pfaff ϖ (nos 6 et suivants), nous avons formé deux invariants *essentiels* du premier ordre, et deux opérateurs différentiels donnant régulièrement les invariants distincts des ordres supérieurs; la méthode employée est généralement celle de Lie et des paramètres différentiels, et nous avons, dans toute notre étude, largement fait appel aux travaux et aux résultats de M. A. Tresse [1]; mais la méthode d'identification directe est aussi utilisée et comparée aux autres.

A côté de la méthode connue de recherches des conditions suffisantes d'équivalence, au moyen d'un nombre limité d'invariants — que nous appelons *suffisants* — nous avons montré que la méthode des transformations infinitésimales pouvait aussi être employée et permettait de prévoir, dans le cas général tout au moins, le nombre de ces invariants suffisants; ceux-ci sont au nombre de six pour une forme ϖ générale.

Ce premier cas devant servir de base aux exemples suivants, nous avons traité les cas particuliers s'y rattachant, et mis en évidence à son sujet les procédés de formation des invariants ou comitants, absolus ou relatifs.

Au no 14 est traité rapidement le cas de deux formes de Pfaff ϖ_1 et ϖ_2 à conserver simultanément, lien entre le cas précédent et celui où l'on considère une forme quadratique χ; ici aussi (nos 16 et suivants), nous ne traitons guère que le cas général.

2. — S'il s'agit de la conservation des équations différentielles, on voit l'importance d'une nouvelle sorte d'invariants relatifs, les invariants *brisés*, et l'on reconnaît que la conservation des équations peut se ramener à celle de formes normées par des facteurs convenables.

On retrouve ainsi les invariants d'une équation de Pfaff $\varpi = 0$ (nos 18 et suivants) comme ceux d'une forme dite *normale* ϖ^*, dont deux invariants sont liés par une relation simple; le choix

[1] *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations.* Thèse (1893).

du facteur normant laisse d'ailleurs un certain arbitraire, et l'on est amené à normer de façons différentes la forme ϖ d'une équation $\varpi = 0$ dans les divers problèmes où cette forme intervient.

La conservation simultanée de deux équations $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 0$ est équivalente — au point de vue des transformations infinitésimales — à celle d'une équation quadratique $\chi = 0$; ces deux cas sont traités à partir du n° 25, et à la forme quadratique χ correspond encore un facteur normant convenable pour ce cas.

Un cas particulier est enfin indiqué (n° 29), celui où l'on veut conserver une équation $\varpi = 0$ et une forme quadratique $\chi_0 = 2M_0\, du\, dv$, cas intéressant pour les applications géométriques et la simplificité des invariants qu'il met en évidence. C'est aussi en vue des applications géométriques que nous avons montré qu'au problème des équivalences (Σ) pouvait se ramener celui d'équivalences pour les transformations où le rôle des variables u et v serait échangé.

Préliminaires et notations.

3. — Les problèmes d'équivalence qui vont suivre se rapportent à des formes ou des équations différentielles, respectivement en u, v et $\bar{u}$, $\bar{v}$, vis-à-vis de certains changements de variables. A côté des transformations générales Π, données par les formules

$$\bar{u} = U(u, v) \qquad \bar{v} = V(u, v) \tag{Π}$$

nous considérerons les transformations à variables séparées

$$\bar{u} = U(u) \qquad \bar{v} = V(v) \tag{Σ}$$

et quand rien d'autre ne sera précisé, les équivalences et les invariants se rapporteront à ces transformations Σ, qui forment un groupe (continu et infini) ; les transformations Σ sont des produits $\Sigma_1\Sigma_2$ ou $\Sigma_2\Sigma_1$ de transformations particulières

$$\bar{u} = U(u) \qquad \bar{v} = v \tag{Σ_1}$$

$$\bar{u} = u \qquad \bar{v} = V(v). \tag{Σ_2}$$