

SUR CERTAINS ASPECTS DE NOTIONS FONDAMENTALES EN ANALYSE

Autor(en): **Bouligand, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21878>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR CERTAINS ASPECTS DE NOTIONS FONDAMENTALES EN ANALYSE

PAR

M. Georges BOULIGAND (Poitiers).

1. L'Analyse classique est une doctrine essentiellement fondée sur la notion première du continu réel à une dimension; un caractère important de cette notion est de constituer un type *sui generis* d'infini actuel, qui, par exemple, diffère essentiellement de cet autre type: la suite infinie des entiers positifs. L'idée d'une comparaison des types d'infini actuel a joué un grand rôle dans les travaux de Georg Cantor et l'a conduit à la conception des nombres transfinis. On remarque, dans la plupart des écrits issus de cette innovation, une tendance dominante à s'inspirer de la logique formelle et on peut se demander si un moyen d'élucider certaines difficultés qui s'offrent en cette matière ne serait pas de les étudier à la lumière des résultats acquis par l'Analyse.

Le présent article, dont le programme est des plus modestes, va se borner à chercher ce qu'une telle tentative peut attendre de la considération systématique des systèmes linéaires et homogènes d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues. Cette considération offre pour le moins l'intérêt de rapprochements inattendus.

2. Rappelons d'abord qu'étant donné un système homogène et linéaire d'un nombre fini d'équations indépendantes à un nombre fini d'inconnues, il n'admet de solutions non nulles que si le second nombre dépasse le premier. Cela suggère immédiatement un critère qui permettrait d'ordonner mutuellement divers types d'infini actuel. Soit un système linéaire et homogène infini. Supposons qu'il admette un certain ensemble, plus ou moins

riche, de solutions non nulles. Il sera naturel de considérer l'infini actuel de ses inconnues comme supérieur à l'infini actuel de ses équations indépendantes, toutes les fois du moins que cette dernière notion aura pu être précisée. Il n'est pas difficile de former des exemples très élémentaires. Le système infini

$$x_{k+1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k$$

$$x_{k+2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k$$

$$\vdots$$

$$x_{k+r} = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rk}x_k$$

$$\vdots$$

peut être regardé comme un système de ω équations indépendantes à $\omega + k$ inconnues, le symbole ω représentant, conformément à l'usage, ce type d'infini actuel qui est celui de la suite des entiers positifs. Voici un exemple où les deux infinis actuels diffèrent encore d'un nombre fini, bien que chacun d'eux se rapporte au continuum à deux dimensions de la géométrie plane : les inconnues sont les valeurs de la fonction f aux divers points x, y de ce continuum et le système est formé par les équations

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1} \partial y} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^k f}{\partial y^k} = 0$$

supposées écrites en chaque point de ce continuum. Nous sommes loin, dans l'état actuel de la Science et de nos connaissances sur la dérivation, de pouvoir dénombrer (dans un sens idéaliste), d'après la présence des dérivées ici écrites, l'ensemble des conditions indépendantes et reconnaître qu'il est surpassé d'un nombre fini d'unités (égal à celui des termes d'un polynôme de degré $k-1$) par le nombre des inconnues. Si l'on considère les transformations ponctuelles du plan (x, y) définies par des équations

$$X = \varphi(x, y) \quad Y = \psi(x, y)$$

où φ et ψ admettent des dérivées continues d'ordre k , on est conduit du système précédent à un système un peu moins simple, mais dans lequel la différence entre l'infini actuel des inconnues et l'infini actuel des équations est respectée. La conception de cette différence est donc relative à un certain champ d'invariance.

3. Avant d'aller plus loin, il convient de faire une remarque très importante pour la suite. Lorsqu'on résout un système d'un nombre fini d'équations, l'ordre de ces équations est indifférent. Mais, à partir du moment où l'on se trouve en présence d'une infinité d'équations, il peut arriver que des modalités topologiques se présentent ¹. Cette idée sera précisée par les exemples que nous donnerons. Pour bien délimiter le point sur lequel se portera de préférence notre attention, nous noterons d'abord qu'étant donné un système linéaire fini pour lequel le nombre des inconnues dépasse de K unités le nombre des équations indépendantes, la coïncidence des valeurs de K inconnues entraîne la coïncidence de toutes les autres. Or ceci suggère, pour les systèmes infinis la question plus générale que voici :

Etant donné un système linéaire Σ d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues (dont l'infinité actuelle surpasse celle des équations) sur quel ensemble partiel d'inconnues faut-il supposer la coïncidence pour entraîner par là-même la coïncidence des valeurs de toutes les inconnues dont l'ensemble constitue la solution ? En généralisant ce qui se passe dans le cas des systèmes finis, on pourra regarder la richesse de cet ensemble comme révélant l'indétermination plus ou moins large du système.

Or précisément, nous verrons l'intervention active de circonstances topologiques dans la détermination de l'ensemble qu'il s'agit de définir. Autrement dit, cet ensemble est connu à une transformation près d'un certain groupe, à savoir celui de la topologie pure ou un de ses sous-groupes (dans des cas usuels).

4. Une fonction $f(x)$ définie et continue dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ est la solution générale d'un problème linéaire à une infinité d'inconnues, celui qui s'exprime en écrivant partout l'équation

$$\lim_{h=0} [f(x+h) - f(x)] = 0 \quad (1)$$

¹ J'ai présenté pour la première fois des considérations de ce genre, avec des exemples, dans une étude « Sur les Substitutions fonctionnelles linéaires à coefficients positifs », *Bull. des Scienc. Math.*, mai 1927. Voir aussi dans la *Revue Scientifique*, 1928, dernier trimestre, mon article : « Le finitisme et son efficacité dans la recherche mathématique ». De son côté, M. J. Delsarte a rencontré aussi la notion de problème linéaire ordonné : voir sa note du 17 juin 1928, *Sur la composition de seconde espèce*, aux « Rendiconti dei Lincei ».

h étant seulement astreint à être positif à la limite inférieure, négatif à la limite supérieure de l'intervalle de définition de $f(x)$. Or, la condition (1), exprimée en tout point de cet intervalle, donne naissance à un système linéaire et homogène à une infinité d'inconnues. Deux solutions de ce système coïncident à partir du moment où elles coïncident sur un ensemble dénombrable, partout dense dans l'intervalle de définition. Or c'est là un caractère invariant par le groupe des transformations continues et biunivoques de cet intervalle. Ainsi se trouve précisé, par un infini actuel de structure appropriée, le type d'indétermination du système (1).

5. Une fonction $f(x)$ définie et intégrable au sens de Riemann dans l'intervalle $0 \leq x \leq 1$ est la solution générale d'un problème linéaire à une infinité d'inconnues, exprimant que l'oscillation moyenne de $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$ est nulle. On ne peut, dans le cas actuel, définir aucun véritable sous-ensemble de cet intervalle, tel que la coïncidence de deux fonctions intégrables sur ce sous-ensemble entraîne leur coïncidence sur l'intervalle. Ceci nous donne, à un certain point de vue, l'exemple d'un problème linéaire présentant le degré maximum d'indétermination sur l'ensemble où il est posé.

6. La recherche d'une fonction analytique uniforme $P + iQ$ de la variable complexe $x + iy$ se ramène à un problème linéaire à une double infinité d'inconnues $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, qu'il s'agit d'évaluer aux divers points d'une région du plan. Ces inconnues satisfont au système

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} [P(x + h, y + k) - P(x, y)] = 0$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} [Q(x + h, y + k) - Q(x, y)] = 0$$

$$\int_C P dx - Q dy = 0$$

$$\int_C Q dx + P dy = 0$$

le long de toute courbe simple fermée C , douée d'une tangente continue et orientée, et intérieure à la région en question.

Deux solutions de ce système infini coïncideront à partir du moment où elles prennent les mêmes valeurs en une infinité (qu'on peut supposer dénombrable) de points, pourvu que ces points aient un point d'accumulation, intérieur à la région en question. Le degré d'indétermination du système est-il donc celui d'une infinité dénombrable, soumise à des restrictions invariantes par le groupe des transformations continues et biunivoques du plan.

7. La recherche d'une fonction harmonique uniforme de x et de y est un problème linéaire à une infinité d'inconnues: on peut donner aux équations de ce problème une forme strictement locale, en écrivant en chaque point du plan des x, y l'équation de Laplace; on peut lui donner aussi une forme intégrale en écrivant que la fonction cherchée satisfait au théorème de la moyenne de Gauss ou à toute autre condition d'invariance par médiation. Deux solutions de l'un des systèmes infinis (tous équivalents) ainsi obtenus coïncideront à partir du moment où elles prennent mêmes valeurs en une infinité (qu'on peut supposer dénombrable) de points M , pourvu que ces points M , à l'intérieur de la région où l'on suppose vérifiées les hypothèses d'harmonicité traduites par le système, possèdent un point d'accumulation pour lequel le faisceau limite des rayons joignant ce point à un point M infiniment voisin comprenne une infinité de demi-droites. Le degré d'indétermination de l'un des systèmes actuels est-il donc encore une infinité dénombrable, mais dans des conditions différentes du cas précédent. Sous leur forme actuelle, ces conditions sont invariantes par le groupe des transformations continues et biunivoques du plan, pour lesquelles on admet l'existence de dérivées premières continues.

8. D'une manière générale, supposons qu'un problème linéaire infini ait pour objet la détermination d'une fonction de point en une certaine région du plan. Nous dirons que les solutions de ce système sont *monogènes* si la coïncidence de deux d'entre elles sur un ensemble compris dans un domaine, de diamètre arbitrairement petit, entraîne leur coïncidence en général. En somme, les systèmes monogènes sont ceux dont l'indétermination est un infini actuel attaché à un ensemble de diamètre arbitrairement petit.

Notamment les systèmes que nous avons rencontrés, pour définir les fonctions analytiques ou harmoniques uniformes, sont monogènes. A notre sens, une théorie vraiment éducative des équations aux dérivées partielles du second ordre expliquerait dès le début (et sans recours aux imaginaires, c'est-à-dire sans invoquer la monogénéité dans d'autres champs), pourquoi parmi ces équations aux dérivées partielles il en est certaines (celles du type elliptique) traduisant des problèmes linéaires infinis monogènes, alors qu'il en est d'autres (celles du type hyperbolique) qui ne présentent pas ce caractère.

En outre, cette manière de concevoir la monogénéité aurait l'avantage de rallier tout naturellement à son point de vue certaines théories récentes, comme celle des fonctions quasi-analytiques.

9. En résumé, un grand nombre de théories de l'Analyse classique peuvent être envisagées comme le résultat de la discussion de systèmes linéaires infinis. L'examen synthétique de ces résultats met en évidence le fait suivant : l'infini actuel exprimant le degré d'indétermination de l'un de ces systèmes ne trouve son expression que dans la donnée d'un certain ensemble, défini à partir du continu réel, ou même d'une classe d'ensembles équivalents se déduisant du précédent par les transformations d'un groupe plus ou moins large. Par exemple, au n° 6, est intervenu un ensemble invariant par le groupe purement topologique, tandis qu'au n° 7, en est apparu un autre, invariant par le groupe de la topologie restreinte du premier ordre. Dans un certain sens, on a ainsi une idée plus nette des infinis actuels et de leur variété : somme toute, se donner un infini actuel, c'est donner une classe d'ensemble infinis réductibles à l'un d'eux par les transformations d'un certain groupe.

En vertu du caractère topologique de ce groupe, les considérations d'ordre jouent ici un rôle essentiel : prise isolément, la notion du nombre cardinal, où il est fait abstraction des relations de situation, serait donc inopérante dans le champ de recherches que nous venons de parcourir. Il y a là, entre le cas des systèmes linéaires finis et celui des systèmes linéaires infinis, une différence notable.
