George D. Birkhoff. — **Dynamical Systems.** (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume IX.) — Un volume gr. in-8° de VIII-296 pages. 3 $. New-York, 1927.

Ceci est de la Mécanique théorique développée avec le talent universel de M. Birkhoff. L'illustre auteur poursuit surtout l'étude des équations de Lagrange et des équations canoniques de Hamilton; il a prolongé Jacobi, Hill, Poincaré et travaille maintenant avec MM. Hadamard, Levi-Civita, Sundman, Whittaker. La méthode est surtout analytique; elle étudie les conditions d'intégrabilité, les invariants, les groupes attachés aux équations dynamiques et cherche à voir ensuite les systèmes dynamiques analytiquement maniables qui correspondent à ces conditions, à ces propriétés invariantes ou à ces groupes. L'introspection mathématique joue avant l'observation. Quelle difficulté que d'analyser brièvement un livre qui vous émerveille à chaque page! Essayons cependant d'indiquer le plus lumineux.

Tout d'abord, à propos des systèmes conservatifs, je trouve avec plaisir un renvoi aux travaux de Voss et des frères E. et F. Cosserat. L'éminent directeur de l'Observatoire de Toulouse a d'ailleurs fait une découverte de premier ordre en créant une Energétique générale appuyée sur la Théorie du trièdre mobile, théorie pouvant jouer un rôle analogue au rôle des théories de Maxwell.

Les équations de Lagrange s'établissent de la manière la plus simple pour des systèmes de points matériels; on peut leur laisser cette origine élémentaire et examiner ensuite les cas plus complexes où elles subsistent. Il y a aussi des manières « internes » et « externes » de caractériser les systèmes lagrangiens; il y a des réciprocités, des réversibilités qui maintiennent l'invariance des équations pour des systèmes dynamiques nettement différents mais pouvant être symétriquement comparés ou opposés. A signaler aussi, tout particulièrement, la méthode des multiplicateurs permettant de réunir linéairement les symboles lagrangiens de manière à obtenir une dérivée exacte par rapport au temps. Ce cas en réunit aisément d'autres à intégrales élémentaires.

Les méthodes intégrales variationnelles portent à considérer les équations hamiltoniennes comme rentrant dans des équations pfaffiennes plus générales. Des problèmes d'équilibre, on passe aisément à ceux de mouvement périodique et, sous forme de multiplicateurs attachés plus spécialement aux équations canoniques, on retrouve les « exposants caractéristiques » introduits par Poincaré dans le premier volume de ses *Méthodes nouvelles*. Quant aux formes pfaffiennes, elles ne vont évidemment pas sans expressions tourbillonnaires propres à conduire aux théories électrodynamiques.

La stabilité dans les mouvements périodiques peut être de différents types tous plus ou moins prévus par Poincaré; c'est encore une question de multiplicateurs exponentiels imaginaires ou réels. Un mouvement périodique particulièrement simple, tel le mouvement de Képler, peut être perturbé, compliqué, sans perdre son caractère périodique, de par une sorte de prolongement analytique. C'est toujours, originairement, du Poincaré, mais, chose plus remarquable encore et qui ne va pas sans quelque émotion, c'est d'arriver maintenant au dernier théorème de Poincaré, à celui dont il ne publia qu'une démonstration incomplète peu avant sa fin si brusque. C'est le théorème de l'anneau transformé en lui-même mais avec deux points invariants, théorème aux applications nombreuses quant aux mouvements périodiques voisins d'un premier mouvement, quant aux configurations géodésiques sur les surfaces convexes..... Deux chapitres suivent sur la théorie générale des systèmes dynamiques et le cas de deux degrés de liberté. C'est une sorte de théorie des ensembles de mouvements avec très peu de formules ou avec d'ingénieux procédés graphiques tranchant, dans l'espace-temps, des questions d'*analysis situs.*

Le dernier chapitre a trait au Problème des Trois Corps envisagé avec les méthodes inaugurées par Sundmann. C'est la nature des collisions possibles ou impossibles qui régit cette savante analyse qui, par ce fait, se trouve dépendre également de l'*analysis situs.*

En voici assez pour dépeindre le prodigieux intérêt de ce livre qui développe, de manière très accessible et extrêmement élégante, des questions souvent considérées comme très ardues. Comme il arrive souvent, ces questions n'ont pas été traitées d'abord avec le maximum de simplicité mais on ne voit guère maintenant ce qui pourrait être plus clair que l'exposé de M. Birkhoff.

A. Buhl (Toulouse).

Emile Borel. — **Leçons sur les séries divergentes.** Deuxième édition revue et entièrement remaniée avec le concours de Georges Bouligand. — Un vol. gr. in-8° de xii-260 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1928.

La première édition de cet ouvrage date de 1901. *L'Enseignement mathématique* en rendit compte par la plume d'Ettore Bortolotti (T. IV, 1902, p. 457). Que de chemin parcouru depuis lors. La question est intimément mêlée à celle du prolongement analytique attaquée par Mittag-Leffler à l'aide de méthodes de sommabilité et sur laquelle le regretté savant n'a dit son dernier mot qu'en 1918. Ce point d'histoire porte d'abord à établir une distinction à laquelle M. Borel tient beaucoup et non sans raison. Etudier la série *divergente*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

c'est étudier

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

pour $z = 1$, donc hors du cercle de convergence ; le prolongement analytique peut intervenir, mais il n'intervient pas forcément, ne serait-ce que parce que la première série peut-être étudiée tout autrement que par l'adjonction de la variable z qui a donné la seconde.

La théorie des séries asymptotiques de Poincaré, les développements en fractions continues offrent des ressources des plus élégantes pour donner certains droits de cité à la divergence.

Maintenant, il faut reconnaître, en fait, que, depuis 1901, c'est surtout la *sommabilité*, généralement cotoyée par le prolongement analytique, qui a entraîné le plus de travaux et de développements nouveaux. Cette constatation ne peut déplaire à M. Borel, créateur de la notion. Elle est d'ailleurs en évidence dans le présent livre dont les deux premiers chapitres ne sont pas plus étendus que dans la première édition, malgré quelques transformations très heureuses. L'extension ne commence qu'avec le Chapitre III dédié aux séries sommables.