# §4. — Expression du moment de deux droites en coordonnées de la droite.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

des arêtes qui ne se coupent pas menons un plan *perpendiculaire à l'arête opposée* (ce qui est en général impossible et veut dire: perpendiculaire à la plus courte distance des deux arêtes). Le tétraèdre est décomposé en deux tétraèdres ayant pour base commune un triangle; le volume entier est égal à la somme (ou différence) des volumes de ces deux tétraèdres.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot (h_1 \pm h_2) \,, \qquad h_1 \pm h_2 = d' \sin V \quad \text{et} \quad S = \frac{a\delta}{2} \,,$$

ce qui ramène à la formule (4).

En résumé, à l'aide des développements du § 2 nous pouvons dire, qu'*en coordonnées homogènes tétraèdriques le moment de deux droites s'exprime — jusqu'à un multiplicateur dépendant seulement du choix du système de coordonnées — par le déterminant composé des coordonnées des deux paires de points pris sur les deux droites.* Cette remarque va être mise à profit dans la suite.

## § 4. — *Expression du moment de deux droites en coordonnées de la droite.*

Prenons les coordonnées homogènes de la droite $p_{ix}$, liées par la relation

$$P \equiv (p \,,\, p) \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0 \,. \tag{1}$$

La condition pour que deux droites $p$ et $p'$ se coupent est alors

$$(p \,,\, p') = \Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} p'_{ik} = 0 \,. \tag{2}$$

Ce n'est autre chose, à un facteur près, que le volume du tétraèdre formé par deux segments de longueur 1 pris sur l'une et l'autre droite. En effet, si $x$, $y$ sont deux points de la première droite, on a

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i \,,$$

à un facteur près; si $\xi$, $\eta$ sont deux points de la seconde,

$$p'_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i \,;$$

ainsi donc

$$(p, p') = \Sigma(x_1 y_2)(\xi_3 \eta_4) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix},$$

et d'après § 2

$$= 6\lambda . \mathrm{V} ,$$

donc d'après § 3

$$= \lambda . \delta . \sin \mathrm{V} .$$

Ainsi

$$\delta . \sin \mathrm{V} = \lambda' . (p, p') . \qquad (3)$$

## Deuxième Partie: Applications.

### § 5. — *Applications à la théorie des connexes ternaires.*

1. — Soient $(x, u)$, $(y, v)$ deux éléments (point, droite) du plan connexe, et soient $a$ la droite $(xy)$, A le point $(uv)$. Les coordonnées de A sont proportionelles aux mineurs de la matrice

$$\begin{Vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{Vmatrix}.$$

Donc l'aire du triangle A$xy$, à un facteur près dépendant du choix du système des coordonnées, est représentée par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix} \equiv \Sigma(u_i v_k)(x_i x_k) \equiv u_x v_y - v_x u_y$$

donnée dans mon mémoire cité plus haut.

Mais nous pourrions considérer un autre triangle, notamment celui formé par les droites $u$, $v$, $a \equiv (xy)$. D'après une formule connue (G. Salmon, *Sections coniques*, n° 39, p. 53) son aire a pour expression

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (xy)_1 & (xy)_2 & (xy)_3 \end{vmatrix}^2}{(u_1 v_2)(v_1 (xy)_2) \cdot ((xy)_1 u_2)},$$