§2. — Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

données homogènes des trois points et l'aire du triangle qu'ils forment.

Passons à l'espace.

§ 2. — *Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.*

Prenons pour le système des coordonnées tétraédriques x, y, z, t, les quatre perpendiculaires abaissées d'un point M sur les quatre plans d'un certain tétraèdre fondamental. Soient A, B, C, D les 4 sommets, α, β, γ, δ les aires des faces opposées, on a

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta \cdot t = 3 \cdot V_0 \,. \qquad (1)$$

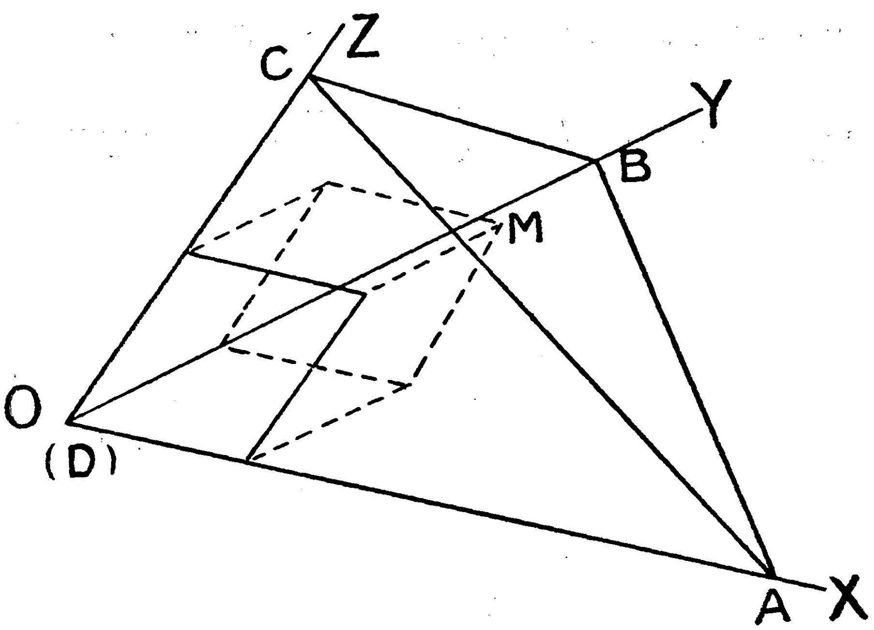

Fig. 2.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x , & y , & z , & t \\ x' , & y' , & z' , & t' \\ x'' , & y'' , & z'' , & t'' \\ x''' , & y''' , & z''' , & t''' \end{vmatrix} = \frac{3V_0}{\delta} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} . \qquad (2)$$

Choisissons à présent un système des coordonnées non-homogènes obliquangles ayant pour plans les 3 plans du tétraèdre fondamental — alors z, parexemple, est la hauteur du parallélépipède dont les arêtes sont $\bar{y}$, $\bar{x}$, $\bar{z}$, — de sorte que $z = \bar{z} \cos (z, \bar{z})$ (fig. 2).

De même

$$y = \bar{y} \cdot \cos(y, \bar{y}) ,$$

$$x = \bar{x} \cdot \cos(x, \bar{x}) .$$

Ainsi

$$(xy'z''t''') = (\bar{x} \cdot \bar{y}' \cdot \bar{z}'' \cdot 1) \cdot \frac{3V_0}{\delta} \cos(x, \bar{x}) \cdot \cos(y, \bar{y}) \cos(z, \bar{z}) .$$

Du point O comme centre décrivons une sphère de rayon 1, soient X. Y, Z les 3 points de rencontre de cette sphère avec les axes des coordonnées obliques; soient

$$\sphericalangle \mathrm{YOX} = \lambda , \quad \sphericalangle \mathrm{XOZ} = \mu , \quad \sphericalangle \mathrm{YOZ} = \nu .$$

Nous aurons un triangle sphérique, dont les hauteurs (fig. 3)

$$h_\lambda = \frac{\pi}{2} - (z, \bar{z}) , \quad h_\mu = \frac{\pi}{2} - (y, \bar{y}) , \quad h_\nu = \frac{\pi}{2} - (z, \bar{z})$$

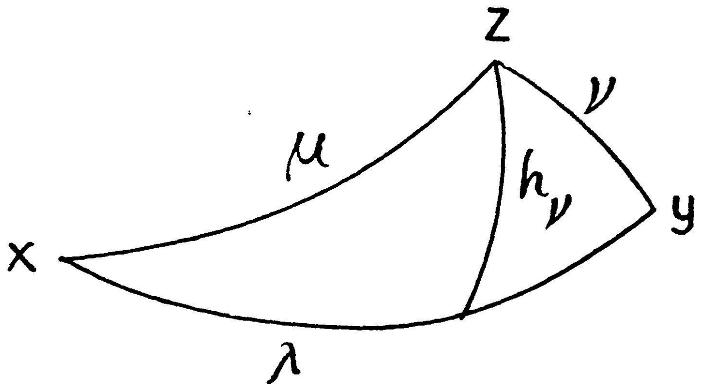

Fig. 3.

sont à calculer. Désignons les angles du triangle sphérique XYZ respectivement par X, Y, Z.

Alors

$$\sin h_\lambda = \sin \mu \cdot \sin \mathrm{X} = \sin \nu \cdot \sin \mathrm{Y} .$$

Soit

$$\lambda + \mu + \nu = 2s .$$

D'après les formules connues de la trigonométrie sphérique

$$\sin \mathrm{X} = 2 \frac{\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-\lambda) \cdot \sin(s-\mu) \cdot \sin(s-\nu)}}{\sin \lambda \cdot \sin \mu} = \frac{2\sqrt{\mathrm{P}}}{\sin \lambda \sin \mu} .$$

De même

$$\sin Y = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda . \sin\nu}, \qquad \sin z = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\nu \sin\mu}.$$

Donc

$$\sin h_\lambda = \cos(z, \bar{z}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda},$$

$$\sin h_\mu = \cos(y, \bar{y}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\mu},$$

$$\sin h_\nu = \cos(x, \bar{x}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin\nu}.$$

Ainsi

$$(xy'z''t''') = \frac{8 . 3 . V_0}{\delta} \cdot \frac{P^{3/2}}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} (\overline{x}\,\overline{y}'\,\overline{z}'', 1) . \qquad (3)$$

Mais ce n'est pas encore la relation définitive. Il est intéressant d'établir le multiplicateur exact. Introduisons un système de coordonnées dont l'axe Oξ coïncide avec l'axe O$\overline{X}$, OH étant situé dans le plan $\overline{X}$O$\overline{Y}$ et perpendiculaire à O$\overline{X}$, enfin OZ étant perpendiculaire au plan $\overline{X}$O$\overline{Y}$.

Nous aurons pour le tableau des 9 cosinus:

	OΞ	OH	OZ
$\overline{O}$X	1	0	0
$\overline{O}$Y	$\cos\lambda$	$\sin\lambda$	0
$\overline{O}$Z	$\cos\mu$	$\cos U$	$\cos W$

Les angles U et W sont à déterminer à l'aide des relations de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (4)$$

Pour déterminer cos W nous substituons les angles de OZ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & 0 \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos W \\ 0 & 0 & \cos W & 1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 - \cos^2 W \end{vmatrix} ,$$

ou enfin

$$4P - \cos^2 W \,.\, \sin^2\lambda = 0 ,$$

d'où l'on tire

$$\cos W = \pm \frac{\sqrt{P}}{\sin\lambda} . \tag{5}$$

De même pour le calcul de $\cos U$ nous avons à substituer dans (4) les angles de OH, ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu & 0 \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu & \sin\lambda \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 & \cos U \\ 0 & \sin\lambda & \cos U & 1 \end{vmatrix} , \quad \text{d'où} \quad \cos U = \frac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} , \tag{6}$$

Ainsi les formules de transformation deviennent

$$\overline{X} + \overline{Y}\cos\lambda + \overline{Z}\cos\mu = \xi ,$$

$$\overline{X}\cos\lambda + \overline{Y} + \overline{Z}\cos\nu = \xi\cos\lambda + \eta\sin\lambda ,$$

$$\overline{X}\cos\mu + \overline{Y}\cos\nu + \overline{Z} = \xi\cos\mu + \eta\frac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta\frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} .$$

Formons à présent le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi \,, & \xi\cos\lambda + \eta\sin\lambda \,, & \xi\cos\mu + \eta\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi' \,, & \xi'\cos\lambda + \eta'\sin\lambda \,, & \xi'\cos\mu + \eta'\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta'\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi'' \,, & \xi''\cos\lambda + \eta''\sin\lambda \,, & \xi''\cos\mu + \eta''\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta''\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \\ \xi''' \,, & \xi'''\cos\lambda + \eta'''\sin\lambda \,, & \xi'''\cos\mu + \eta'''\dfrac{\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu}{\sin\lambda} + \zeta'''\dfrac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} \end{vmatrix} .$$

Il est égal, comme il est facile à voir, à

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' & 1 \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' & 1 \end{vmatrix} \times \sin\lambda \times \frac{2\sqrt{P}}{\sin\lambda} = 6V \,.\, 2\sqrt{P} . \tag{7}$$

Mais, d'autre part, ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} \overline{X}+\overline{Y}\cos\lambda+\overline{Z}\cos\mu, & \overline{X}\cos\lambda+\overline{Y}+\overline{Z}\cos\nu, & \overline{X}\cos\mu+\overline{Y}\cos\nu+\overline{Z}, & 1 \\ \overline{X'}+\overline{Y'}\cos\lambda+\overline{Z'}\cos\mu, & \overline{X'}\cos\lambda+\overline{Y'}+\overline{Z'}\cos\nu, & \overline{X'}\cos\mu+\overline{Y'}\cos\nu+\overline{Z'}, & 1 \\ \overline{X''}+\overline{Y''}\cos\lambda+\overline{Z''}\cos\mu, & \overline{X''}\cos\lambda+\overline{Y''}+\overline{Z''}\cos\nu, & \overline{X''}\cos\mu+\overline{Y''}\cos\nu+\overline{Z''}, & 1 \\ \overline{X'''}+\overline{Y'''}\cos\lambda+\overline{Z'''}\cos\mu, & \overline{X'''}\cos\lambda+\overline{Y'''}+\overline{Z'''}\cos\nu, & \overline{X'''}\cos\mu+\overline{Y'''}\cos\nu+\overline{Z'''}, & 1 \end{vmatrix},$$

que l'on transforme facilement en

$$\begin{vmatrix} (\overline{X'}-\overline{X})+(\overline{Y'}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z'}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X'}-\overline{X})\cos\lambda+(\overline{Y'}-\overline{Y})+(\overline{Z'}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X'}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y'}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z'}-\overline{Z}) \\ (\overline{X''}-\overline{X})+(\overline{Y''}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z''}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X''}-\overline{X})\cos\lambda+(\overline{Y''}-\overline{Y})+(\overline{Z''}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X''}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y''}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z''}-\overline{Z}) \\ (\overline{X'''}-\overline{X})+(\overline{Y'''}-\overline{Y})\cos\lambda+(\overline{Z'''}-\overline{Z})\cos\mu, & (\overline{X'''}-\overline{X})\cos\lambda+(\overline{Y'''}-\overline{Y})+(\overline{Z'''}-\overline{Z})\cos\nu, & (\overline{X'''}-\overline{X})\cos\mu+(\overline{Y'''}-\overline{Y})\cos\nu+(\overline{Z'''}-\overline{Z}) \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \overline{X'}-\overline{X}, & \overline{Y'}-\overline{Y}, & \overline{Z'}-\overline{Z} \\ \overline{X''}-\overline{X}, & \overline{Y''}-\overline{Y}, & \overline{Z''}-\overline{Z} \\ \overline{X'''}-\overline{X}, & \overline{Y'''}-\overline{Y}, & \overline{Z'''}-\overline{Z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \overline{X} & \overline{Y} & \overline{Z} & 1 \\ \overline{X'} & \overline{Y'} & \overline{Z'} & 1 \\ \overline{X''} & \overline{Y''} & \overline{Z''} & 1 \\ \overline{X'''} & \overline{Y'''} & \overline{Z'''} & 1 \end{vmatrix} . 4P . \qquad (8)$$

Donc, revenant à la formule (A) nous aurons:

$$(xy'z''z''') = \frac{8 . 3V_0}{\delta} . \frac{P^{3/2}}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} \frac{6V . 2\sqrt{P}}{4P} .$$

Donc, enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{72V_0}{\delta} \frac{P}{\sin\lambda \sin\mu \sin\nu} . V \qquad (9)$$

c'est la formule, que nous voulions établir.

Il est à remarquer que le facteur

$$\frac{72 V_0 P}{\delta . \sin \lambda \ \sin \mu . \sin \nu}$$

ne dépend que du choix du tétraèdre de référence; il est le même pour tous les quatre points choisis M, M′, M″, M‴.

§ 3. — *Moment de deux droites.*

La plus courte distance de deux droites de l'espace

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \frac{x-a'}{l'} = \frac{y-b'}{m'} = \frac{z-c'}{n'} \quad (1')$$

est donnée par la formule

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sqrt{\Sigma (mn' - nm')^2} \qquad (2)$$

ou bien

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sin V . \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} . \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} \qquad (2')$$

où V est l'angle de deux droites. L'expression devient plus simple si l, m, n, l', m', n' désignent les cosinus des angles, alors $l^2 + m^2 + n^2 = 1 = l'^2 + m'^2 + n'^2$. Nous avons

$$\delta . \sin V = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} . \qquad (3)$$

Le produit $\delta . \sin V$ est ce qu'on appelle *le moment de deux droites* (1) et (1′). Le déterminant à droite égalé à zéro exprime que les deux droites se coupent. On peut donc dire que *les deux droites de l'espace se coupent si leur moment s'annule*, — en d'autres mots, si leur plus courte distance est nulle, ou bien si elles font un angle nul, c'est-à-dire si elles sont parallèles.

Dans les deux cas le volume d'un tétraèdre que l'on conçoit en