

§1. — L'aire du triangle en coordonnées homogènes (triangulaires).

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES
ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE
DES CONNEXES

PAR

D. SINTSOFF (Kharkof).

C'est à CAYLEY que nous sommes redevables de l'introduction du moment de deux droites. Dans mon mémoire « Théorie des connexes dans l'espace » (*Annales de l'Université de Kasan*, 1895) j'ai appliqué cette notion aux deux droites que l'on obtient si l'on prend deux éléments (point, plan), — l'une qui joint les points, l'autre qui est l'intersection des deux plans, et c'est à cette expression que j'ai donnée le nom de moment de deux éléments du connexe.

Mais l'expression analytique que l'on établit existe aussi pour le connexe ternaire, et j'ai donné (*loc. cit.*, Ch. IV, remarque) son interprétation géométrique.

Mais pour les applications il est important de montrer quels sont les multiplicateurs numériques que l'on introduit, si l'on prend un système particulier de coordonnées homogènes.

C'est par ce problème élémentaire que je commence. Il ne me paraît pas dépourvu d'intérêt. Puis je donne des applications à la théorie des connexes.

PREMIÈRE PARTIE.

§ 1. — *L'aire du triangle en coordonnées homogènes
(triangulaires).*

FERRERS (*Trilinear coordinates*) donne l'expression pour la distance de deux points en coordonnées homogènes. Il n'est pas sans intérêt de donner l'expression correspondante de l'aire d'un triangle.

Prenons pour coordonnées homogènes x, y, z d'un point M les perpendiculaires MQ, MP, MR abaissées de M sur les côtés du triangle fondamental ABC (fig. 1) ayant au sommet C l'angle ω ; les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B, C étant a, b, c , on a

$$ax + by + cz = 2\Delta ABC \equiv 2\Delta_0. \quad (1)$$

Soient les coordonnées (non-homogènes) du même point M par rapport aux axes CA, CB, \bar{x}, \bar{y} . Alors

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x} \cdot \sin \omega \\ y &= \bar{y} \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

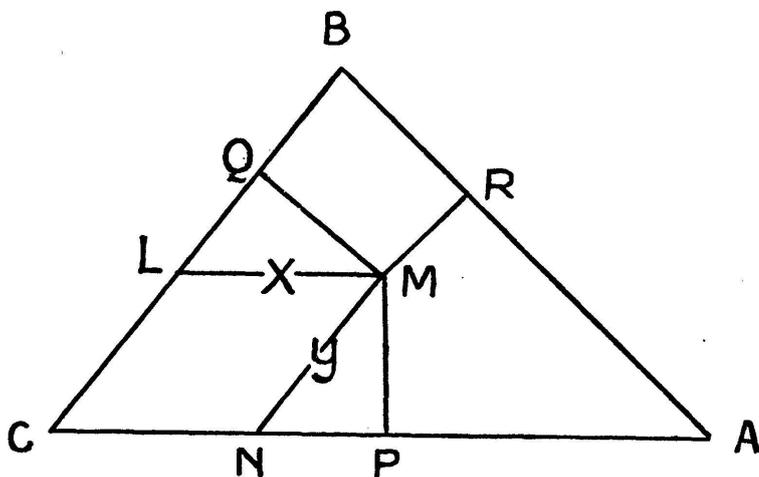


Fig. 1.

Donc, si l'on prend trois points M, M', M''

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & \frac{2\Delta_0 - ax - by}{c} \\ x' & y' & \frac{2\Delta_0 - ax' - by'}{c} \\ x'' & y'' & \frac{2\Delta_0 - ax'' - by''}{c} \end{vmatrix} = \frac{2\Delta_0}{c} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}$$

ou, d'après (2)

$$= \frac{2\Delta_0}{c} \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ \bar{x}' & \bar{y}' & 1 \\ \bar{x}'' & \bar{y}'' & 1 \end{vmatrix} \cdot \sin^2 \omega.$$

Mais si l'on fait tourner l'axe des y (CB) de l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ les coordonnées nouvelles ξ, η s'expriment à l'aide de \bar{x}, \bar{y} :

$$\bar{y} = \frac{\eta}{\sin \omega}, \quad \bar{x} = \xi - \eta \cotg \omega.$$

Donc

$$\begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ \bar{x}' & \bar{y}' & 1 \\ \bar{x}'' & \bar{y}'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \omega} \begin{vmatrix} \xi & -\eta \cotg \omega & \eta & 1 \\ \xi' & -\eta' \cotg \omega & \eta' & 1 \\ \xi'' & -\eta'' \cotg \omega & \eta'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \omega} \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi' & \eta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui est égal à $\frac{2\Delta}{\sin \omega}$, Δ étant l'aire du triangle $MM'M''$.

Donc, dans le système des coordonnées homogènes, que nous avons choisi, on a

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \frac{2\Delta_0}{c} \cdot \frac{2\Delta}{\sin \omega} \cdot \sin^2 \omega = 2\Delta \cdot h_c \cdot \sin \omega \quad (3)$$

puisque $2\Delta_0 = c \cdot h_c$, h_c étant la hauteur correspondant à la base AB du triangle ABC. On pourrait encore poser $2\Delta_0 = ab \sin \omega$. Alors

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \frac{ab}{c} \sin^2 \omega \cdot \Delta. \quad (3')$$

Le défaut de la formule (3') est son manque de symétrie. Si nous prenions pour l'origine des coordonnées obliques d'autres sommets du triangle ABC: A ou B nous aurions $\frac{bc}{a} \sin^2 A$ ou bien $\frac{ac}{b} \sin^2 B$.

Les trois expressions sont égales, vu que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Donc enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 2\Delta \cdot \frac{\Delta_0}{R} = 2\Delta \frac{abc}{4R^2}. \quad (3'')$$

Telle est la relation entre la valeur du déterminant des coor-

données homogènes des trois points et l'aire du triangle qu'ils forment.

Passons à l'espace.

§ 2. — *Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.*

Prenons pour le système des coordonnées tétraédriques x, y, z, t , les quatre perpendiculaires abaissées d'un point M sur les quatre plans d'un certain tétraèdre fondamental. Soient A, B, C, D les 4 sommets, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les aires des faces opposées, on a

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta \cdot t = 3 \cdot V_0 . \tag{1}$$

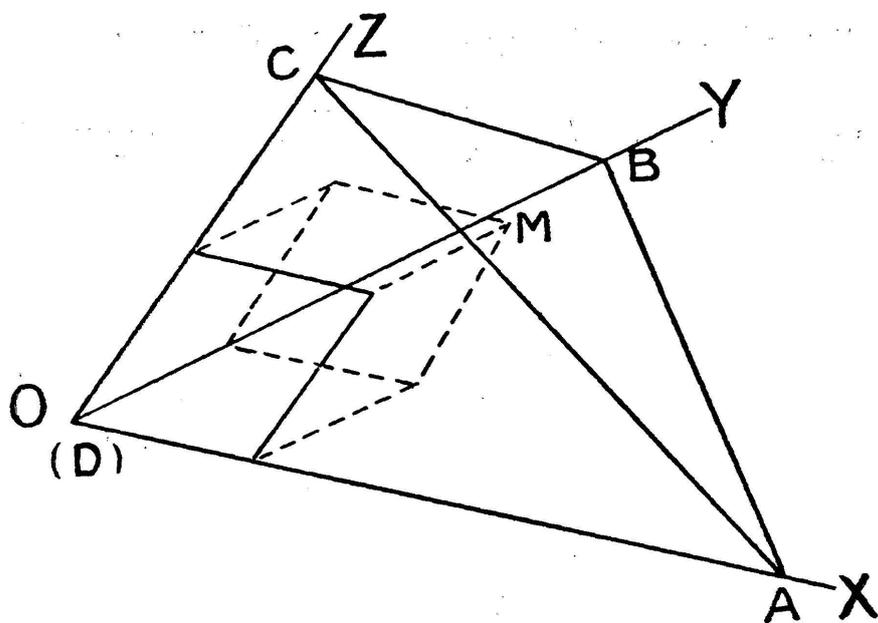


Fig. 2.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{3V_0}{\delta} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} . \tag{2}$$

Choisissons à présent un système des coordonnées non-homogènes obliquangles ayant pour plans les 3 plans du tétraèdre fondamental — alors z , par exemple, est la hauteur du parallélépipède dont les arêtes sont $\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}$, — de sorte que $z = \bar{z} \cos(z, \bar{z})$ (fig. 2).