10. Formule de Stokes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

cas contraire pour justifier la définition fournie par l'équation (8) il faut :

1° Que $\vec{V} \wedge \vec{u}$ ait une divergence (au sens généralisé défini plus haut).

2° Que (8) définisse alors bien un vecteur et un seul. Examinons le premier point : la condition énoncée sera remplie si l'intégrale :

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} \int_S (\vec{V} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{\nu} \, d\sigma \tag{9}$$

prise sur la sphère S de centre M et de rayon ρ admet une limite, quand ρ tend vers zéro, continue avec M, et reste inférieure quel que soit ρ à un nombre fixe Λ. Or, on peut écrire (9), en désignant par ϖ le volume de S :

$$\frac{\vec{u}}{\varpi} \int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V}) \, d\sigma \tag{10}$$

Alors 1° sera satisfaite si la longueur du vecteur $\overrightarrow{W}(\rho, M)$

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3} \int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V}) \, d\sigma$$

reste inférieure à Λ quel que soit ρ et M, et si $\vec{W}$ tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro. On aura alors d'après (8), (9) et (10) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\varpi} \int_S (\vec{\nu} \wedge \vec{V}) \, d\sigma \; ; \tag{11}$$

cette relation (11) définit alors complètement le rotationnel et la condition 2° est bien remplie.

10. *Formule de Stokes.*

Nous allons montrer que l'existence et la continuité du rotationnel généralisé que nous venons de définir dans le paragraphe précédent suffisent pour assurer l'exactitude de la formule de Stokes :

$$\int_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma \tag{12}$$

Σ étant une portion de surface admettant un champ de normales continu, limité par une courbe fermée simple C admettant une tangente continue.

Nous allons commencer par établir (12) en prenant pour C un contour triangulaire A_1, A_2, A_3 : Σ sera alors la portion de plan intérieure à ce triangle, $\vec{\nu}$ sera un *vecteur fixe* $\vec{u}$ perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$ et tel que l'observateur disposé suivant $\vec{u}$ voit un mobile décrivant $A_1A_2A_3$ tourner dans le sens d'orientation des axes de coordonnées. Nous voulons calculer l'intégrale:

$$I = \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} \cdot \vec{u}\, d\sigma \quad ;$$

elle est, d'après (8) égale à:

$$\int_{\Sigma} \text{div}\, (\vec{V} \wedge \vec{u})\, d\sigma \quad ;$$

transformons cette intégrale de surface, en intégrale de volume à l'aide de l'artifice suivant: formons un prisme droit de bases (A'_1, A'_2, A'_3), (A_1, A_2, A_3) distantes d'une quantité infiniment petite l. Nous ferons de plus:

$$\overrightarrow{A'_1A_1} = \overrightarrow{A'_2A_2} = \overrightarrow{A'_3A_3} = \lambda^2 \vec{u} \; .$$

On a alors, à un infiniment petit près:

$$I = \frac{1}{l} \int_{\Omega} \text{div}\, (\vec{V} \wedge \vec{u})\, d\omega$$

Ω étant le domaine prismatique, $d\omega$ l'élément de volume. Mais le théorème flux-divergence nous donne:

$$I = \frac{1}{l} \int_{S} (\vec{V} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{\nu}\, dS$$

S étant la surface du prisme, $\vec{\nu}$ la normale extérieure à S. Mais on peut encore écrire:

$$I = \frac{1}{l} \int_{S} (\vec{u} \wedge \vec{\nu}) \vec{V}\, dS \; .$$

Cette intégrale se scinde en 5 intégrales partielles étendues respectivement aux deux bases et aux trois faces latérales. Les deux premières sont nulles car on a alors:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{u} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (-\vec{u}) = 0 .$$

Considérons donc la portion I_1 de I relative à la face $A_1A_2A_2'A_1'$. Nous avons:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{A_1A_2} .$$

D'autre part, soit $d\vec{M}$ un vecteur infiniment petit colinéaire et de même sens que $\overline{A_1A_2}$. Nous avons:

$$dS = l . dM$$

et nous pouvons écrire, à un infiniment petit près:

$$I_1 = \int_{\overline{A_1A_2}} \frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{A_1A_2} . \vec{V} . d\vec{M} .$$

ou encore:

$$I_1 = \int_{\overline{A_1A_2}} \vec{V} . d\vec{M} .$$

En raisonnant de même pour I_1, I_2, I_3, on voit immédiatement que l'on a:

$$I = \int_C \vec{V} . d\vec{M}$$

C étant le contour $A_1A_2A_3$.

Il est alors facile d'établir la formule (12) pour toutes les surfaces Σ. En effet, en vertu des hypothèses relatives à la continuité du champ de normales à Σ et à celle du rotationnel on peut trouver une surface polyédrale Σ_n inscrite dans Σ, limitée par un contour Γ_n inscrit dans Γ telle que la différence

$$\left| \int_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} . \vec{v} . d\sigma - \int_{\Sigma_n} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{V} . \vec{v}_n . d\sigma_n \right|$$

tende vers zéro quand n augmente indéfiniment, ainsi que:

$$\left| \int_{\Gamma} \vec{V} . d\vec{M} - \int_{\Gamma_n} \vec{V} . d\vec{M}_n \right|$$

Or:

$$\int_{\Sigma_n} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} . \vec{\nu}_n\, d\sigma_n = \int_{\Gamma_n} \vec{V} . d\vec{M}_n \qquad (13)$$

car il est clair que l'on a:

$$\int_{\Gamma_n} \vec{V} . d\vec{M}_r = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{C_i} \vec{V} . d\vec{M}$$

C_i étant une face triangulaire quelconque de Σ_n, car tout côté appartenant à deux triangles à la fois de Σ_n sera parcouru dans les deux sens, et les intégrales de $\vec{V}.d\vec{M}$ correspondantes se détruiront; finalement il ne restera que les intégrales relatives aux côtés de la courbe limite Γ_n. On déduit alors immédiatement l'identité (12) de l'équation (13) en tenant compte de ce que nous avons dit plus haut. Le théorème de Stokes se trouve ainsi établi.

Remarque: La formule de Stokes montre que l'intégrale:

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V} . \vec{\nu}\, d\sigma$$

prise sur toute surface fermée Σ est identiquement nulle. On en déduit alors facilement que le champ vectoriel $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$, défini par l'équation (11) admet partout une divergence qui satisfait à l'identité remarquable:

$$\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}) = 0$$

comme dans le cas classique où les composantes de $\vec{V}$ auraient des dérivées des deux premiers ordres.

11. *Composantes du rotationnel.*

Nous allons établir le théorème fondamental suivant :

Soit le vecteur :

$$\vec{V} = \vec{x}\,P(x, y, z) + \vec{y}\,Q(x, y, z) + \vec{z}\,R(x, y, z)$$