

## 6. Conséquences de la formule (3).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

monstration conduit alors à considérer l'intégrale du second membre de (3) comme une fonction additive et absolument continue de l'ensemble  $V$  des points auxquels on l'étend. Dans ces conditions, la différence :

$$V' - \int_V J(M) d\omega_M$$

est aussi une fonction additive et absolument continue, dont la *dérivée sphérique centrée* est partout nulle. Le problème consiste à en déduire que cette fonction est nulle. Pour les éléments de la solution voir Lebesgue, Ann. Ec. Norm. 1910, et de La Vallée-Poussin, Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire, chap. IV.

#### 6. Conséquences de la formule (3).

Reprenons nos hypothèses simplificatrices de la continuité de  $J(M)$ ; on déduit qu'il y aura nécessairement dans tout volume  $V$  des points où  $J(M)$  sera égale à  $\frac{V'}{V}$  (résultat signalé par Darboux, dans des conditions plus particulières, et comparable à la formule des accroissements finis, dans le champ des fonctions monotones à dérivée continue). De ce fait, il résulte que la limite du rapport de deux volumes correspondants est  $J(M)$  lorsque le premier de ces volumes est infiniment voisin de  $M$  (sans plus).

Il n'y a alors aucune difficulté à déduire de ces résultats le théorème général de variance d'une intégrale multiple :

$$\int_{V'} g(P) d\omega_P = \int_V g(\mathcal{C}(M)) J(M) d\omega_M \quad (4)$$

théorème qui d'ailleurs a une signification physique intuitive et exprime la conservation de la masse par élément; lorsqu'on désigne par  $f(M)$  la densité de la matière qui existe au point  $M$  du volume  $V$ , par  $g(P)$  la densité qui régnera après la déformation, au point  $P$  correspondant de  $V'$ , on aura nécessairement :

$$f(M) d\omega_M = g(P) d\omega_P$$

d'où :

$$f(M) = g(P) \frac{d\omega_P}{d\omega_M} = g[\mathcal{C}(M)]J(M) .$$

Le fait que la limite  $J(M)$  est valable indépendamment de la forme des éléments de volume nous dispense d'insister sur la démonstration de la formule (4).

### 7. Le théorème flux-divergence.

Revenons aux champs vectoriels, ou, ce qui est équivalent, aux transformations infinitésimales. Nos hypothèses seront ici les suivantes :

$a_1$ ) Le champ est défini et continu dans une certaine région  $\mathcal{R}$ <sup>1</sup>.

$c_1$ ) Soit  $M$  un point fixe intérieur à  $\mathcal{R}$ , décrivons une sphère de centre  $M$ , de volume  $\nu$  et soit  $\varphi$  le flux du champ sortant de cette sphère. Le rapport  $\frac{\varphi}{\nu}$  tend vers une limite quand  $\nu$  tend vers zéro : cette limite peut s'appeler *divergence sphérique centrée*.

$d_1$ )  $\frac{\varphi}{\nu}$  reste inférieur à un nombre fixe, cette limitation s'appliquant nécessairement à la divergence.

$e_1$ ) La divergence est une fonction continue de  $M$ .

Nous avons présenté ces hypothèses en les faisant correspondre très exactement aux hypothèses admises dans la démonstration de (3). Seulement ici, l'hypothèse  $b_1$ ) disparaît : elle est remplie *ipso-facto* en vertu de la continuité du champ vectoriel.

L'hypothèse  $b$ ) consistait en effet à exprimer qu'un volume sphérique correspond effectivement à un volume ; l'hypothèse  $b_1$ ) consistera donc en ce que, notre champ étant regardé comme un champ de vitesses, le volume du fluide contenu dans une sphère à l'instant  $t$  admet une dérivée par rapport à  $t$ . Or, cette dérivée est justement le flux du champ sortant de la sphère.

Soit donc le champ vectoriel  $\vec{V}(M)$  satisfaisant aux hypothèses précédentes. Soit un volume  $\Omega$  intérieur à la région  $\mathcal{R}$  et limité par une ou plusieurs surfaces, possédant chacune un champ continu de normales, et dont l'ensemble sera désigné par  $\Sigma$ .

<sup>1</sup> Nous verrons un peu plus loin que l'hypothèse  $b_1$ ) qu'on déduirait de  $b$ ) est remplie *ipso facto*.