

## 4. — Valeur du volume après une déformation finie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le moment est revenu de préciser nos hypothèses sur la transformation  $\mathfrak{T}$ .

a) A une région  $\mathcal{R}_M$  de  $\mathcal{E}_M$ , elle fait correspondre biunivoquement et continument une région  $\mathcal{R}_P$  de  $\mathcal{E}_P$ .

b) A toute sphère intérieure à  $\mathcal{R}_M$  correspond effectivement un volume intérieur à  $\mathcal{R}_P$ . Soit  $v$  le volume de la sphère,  $v'$  son correspondant.

c) Soit un point fixe intérieur à  $\mathcal{R}_M$ ; prenons une sphère infiniment petite de centre M; alors le rapport  $\frac{v'}{v}$  tend vers une limite déterminée  $J(M)$ .

d) Lorsque M décrit une région quelconque, strictement intérieure à  $\mathcal{R}_M$ , la famille des fonctions  $\frac{v'}{v}$  de M (dépendant du paramètre  $v$ ) est bornée dans son ensemble, cette borne s'appliquant nécessairement à  $J(M)$ .

e)  $J(M)$  est continue à l'intérieur de  $\mathcal{R}_M$ .

Nous appellerons  $J(M)$  le *jacobien sphérique centré*, locution proposée par M. Wilkosz et qui a l'avantage de rappeler les conditions particulières de la définition, favorables dans certaines recherches, par exemple pour l'obtention de l'harmonie moyennant des hypothèses simples et bien conformes au mode d'invariance du laplacien <sup>1</sup> qui sera défini comme une divergence sphérique centrée (n° 7).

#### 4. — Valeur du volume après une déformation finie.

Dans tout ce qui suit les intégrations ont lieu au sens de M. Lebesgue. Des hypothèses c) et d) nous déduisons d'abord ce résultat : à tout volume (intérieur à  $\mathcal{R}_M$ ) du premier espace correspond un volume du second.

Il suffit pour cela d'établir que le transformé d'un ensemble de mesure nulle est aussi de mesure nulle. Servons-nous d'un

<sup>1</sup> Dans d'autres questions, il pourra être plus avantageux de faire usage d'un jacobien sphérique non centré, ou encore d'un jacobien cubique (locutions qui se comprennent d'elles-mêmes). Notons que pour le théorème de variance des intégrales multiples, qui va nous occuper, et qui appartient en réalité à la géométrie linéaire, il est indiqué d'utiliser une forme de jacobien obtenue en substituant aux sphères de centre M des volumes  $v$  tels que la figure  $(M, v)$  reste homothétique d'une figure fixe. Il n'y a d'ailleurs qu'une simple transposition à faire dans la démonstration qui va être donnée, en remplaçant les sphères de centre M par les volumes  $v$  soumis à l'hypothèse précédente.

réseau binaire progressif. Il nous permettra d'enfermer l'ensemble dans une infinité de cubes dont la somme des volumes est arbitrairement petite. On peut énoncer la même propriété pour la somme des volumes des sphères circonscrites à ces cubes; or, de l'hypothèse *d*) nous tirons une limite supérieure pour la somme des volumes transformés des cubes, égale au produit d'un nombre fixe par la somme des volumes des sphères précédentes. Le résultat est donc établi. En même temps, il est clair qu'à tout nombre positif  $\varepsilon$ , il est possible de faire correspondre un nombre positif  $\delta$  tel que l'inégalité:

$$\text{mes. d'un ens. de } \mathcal{R}_M < \delta$$

entraîne:

$$\text{mes. ens. transf.} < \varepsilon$$

c'est ce qu'on exprime en disant que la transformation  $\mathfrak{T}$  est *absolument continue*.

Il s'agit maintenant de prouver qu'à un volume quelconque  $V$ , complètement intérieur à  $\mathcal{R}_M$ , correspond un volume  $V'$  (nécessairement intérieur à  $\mathcal{R}_P$ ) donné par la formule:

$$V' = \int_{\check{V}} J(M) d\omega_M. \quad (3)$$

Pour cela, nous tablerons sur la possibilité de trouver à l'intérieur de chaque volume un système d'une infinité dénombrable de sphères, mutuellement extérieures, et dont l'ablation ne laisserait subsister qu'un ensemble de mesure nulle. Admettons cette possibilité, qu'il suffirait d'établir pour un cube, le volume pouvant être obtenu au moyen d'une infinité dénombrable de cubes d'un réseau indéfiniment progressif.

En vertu de ce lemme, nous pourrions trouver dans  $\Omega$  un premier ensemble  $E$  de sphères, conformément aux conditions indiquées. De  $E_1$  passons à un ensemble analogue  $E_2$ , en prenant chaque sphère de  $E_1$ , enlevant de celle-ci une sphère concentrique et de rayon moitié, et appliquant le lemme au volume restant. En répétant indéfiniment ce procédé, nous aurons une suite:

$$E_1, E_2, \dots E_l, \dots$$

d'ensembles de sphères dont les centres formeront des ensembles désignés par

$$e_1, e_2, \dots, e_k, \dots$$

L'ensemble  $e_k$  contient tous les  $e_i$  d'indices  $i < k$ . L'ensemble  $e_\infty$  formé de tous les points des  $e_k$  est dénombrable et *partout dense*.

Soit maintenant la fonction  $J_k(M)$  définie dans les sphères de  $E_k$  de la manière suivante: dans chaque sphère dont le volume est  $v$ , nous lui attribuons la valeur constante  $\frac{v'}{v}$ . Cette fonction est partout définie dans  $V$ , sauf sur un ensemble de mesure nulle où nous pouvons la prendre égale à  $J(M)$ . L'intégrale de la fonction ainsi construite a évidemment pour valeur le volume  $V'$ , quelque soit  $k$ . Donc, lorsque  $k$  croît indéfiniment, elle tend vers une limite égale à  $V'$ . Or, *en vertu de la continuité de  $J(M)$* , les fonctions  $J_k(M)$  qui sont bornées d'après  $d$ ) tendent vers  $J(M)$  dans tout  $V$  lorsque  $k$  croît indéfiniment. La formule (3) apparaît alors comme une conséquence immédiate de ce théorème classique de Lebesgue: *l'intégrale de la limite dans le champ des fonctions bornées est égale à la limite de l'intégrale*.

Notons que le raisonnement présenté sous cette forme ne peut se passer de l'hypothèse de la continuité de  $J(M)$ : l'ensemble sur lequel nous savons d'une manière immédiate (c'est-à-dire sans invoquer la continuité) que  $J_k(M)$  tend vers  $J(M)$  se compose de l'ensemble dénombrable  $e_\infty$  et d'une suite dénombrable d'ensembles de mesure nulle omis à chaque application de ce lemme. La limite n'est donc assurée sans la continuité que sur un ensemble de mesure nulle. Mais, si l'on fait l'hypothèse de la continuité, entraînant l'uniforme continuité, on voit aisément que cette limite est partout assurée.

##### 5. — Conditions de validité de la formule (3).

Le champ de validité de la formule (3) est en réalité beaucoup plus large que le champ défini par les hypothèses  $a, b, c, d, e$ . Cette formule subsiste en réalité dans les conditions les plus générales pour lesquelles le second membre a un sens, c'est-à-dire lorsque la fonction  $J(M)$  existe et est sommable. La dé-