

# VIII

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

conique osculatrice à la courbe en  $A$ ; elle peut être regardée comme l'absolu d'une géométrie cayleyenne; la distance cayleyenne du point  $P$  à un point infiniment voisin  $P'$  sera le logarithme du rapport anharmonique des deux points  $P, P'$  et des deux points où la droite  $PP'$  coupe la conique. Naturellement le  $ds^2$  du plan est indéfini et n'existe que dans les régions du plan d'où on peut mener une tangente à la courbe; la direction  $PA$  est isotrope, la seconde direction isotrope en  $P$  est celle de la seconde tangente menée de  $P$  à la conique osculatrice en  $A$ . Les géodésiques de la métrique ne sont plus en général des droites. L'adjonction d'une courbe quelconque nous a permis ici de faire du plan un espace cayleyen à deux dimensions; cet espace est holonome, parce que la connexion cayleyenne du plan est commandée par le développement de la courbe donnée sur sa conique osculatrice, et ce développement est nécessairement holonome, puisque la courbe n'a qu'une dimension.

On peut de même, dans l'espace projectif à trois dimensions, développer une surface sur la quadrique de Lie; le développement n'est plus holonome, à moins que la surface ne soit réglée: dans ce dernier cas, en effet, la quadrique de Lie est la même tout le long d'une même génératrice; on n'a en réalité à faire qu'à une variété (de droites) à une dimension, ce qui entraîne nécessairement l'holonomie.

## VIII

Revenons maintenant aux espaces non holonomes à groupe fondamental  $G$ . Comme nous l'avons vu, à tout cycle partant d'un point  $A$  de l'espace et y revenant est associée une transformation du groupe  $G$ , transformation qui opère dans l'espace holonome tangent en  $A$ . A l'ensemble des cycles issus de  $A$  est donc associé un ensemble de transformation de  $G$ , qu'on démontre facilement former un groupe  $g$ : c'est le *groupe d'holonomie* de l'espace, qui est essentiellement le même en tous les points  $A$ . Le groupe  $g$  donne en quelque sorte une mesure de la non holonomie de l'espace; s'il se réduit à la transformation identique, c'est qu'on a un espace de Klein. On a donc là un principe de classification des espaces à groupe fondamental donné, de même

que le groupe de Galois d'une équation algébrique permet en gros une classification suivant le degré d'irrationalité des racines.

Les transformations infinitésimales de  $G$  associées aux cycles infinitésimaux appartiennent au groupe d'holonomie, mais elles ne fournissent pas toujours toutes les transformations infinitésimales génératrices de ce groupe. Néanmoins, si elles sont toutes nulles, c'est-à-dire si la courbure riemannienne de l'espace est partout nulle, le groupe d'holonomie se réduit à la transformation identique et l'espace est holonome. Cette conclusion peut se démontrer facilement par le calcul ou par un raisonnement géométrique approché. Mais ici interviennent des considérations d'Analysis situs; la conclusion n'est rigoureuse que si l'espace est simplement connexe, c'est-à-dire si tous les cycles peuvent, par déformation continue, être réduits à zéro. Dans le cas contraire, l'espace peut avoir partout sa courbure riemannienne nulle sans être vraiment holonome. Un exemple classique est fourni par un cylindre de révolution plongé dans l'espace ordinaire; son développement le long d'un cycle sur un de ses plans tangents est holonome si le cycle est réductible à zéro, mais le développement le long d'une section droite a pour effet de faire subir au point de départ  $A$  une translation finie; le groupe d'holonomie est formé des puissances de cette translation. Les mêmes considérations s'appliqueraient à ce qu'on est convenu d'appeler les *formes de Clifford* de l'espace euclidien. On pourrait aussi imaginer, *in abstracto*, sur un cylindre une connexion (non induite) de Weyl, dont la courbure riemannienne soit partout nulle sans que cependant l'espace à deux dimensions constitué par le cylindre doué de cette connexion soit intégralement euclidien, ni même riemannien; seulement, ce n'est qu'en faisant le tour du monde qu'un habitant de cet espace pourrait s'apercevoir que son univers n'est ni euclidien, ni riemannien.

Le principe de classification des espaces d'après leur groupe d'holonomie peut être rattaché au principe d'adjonction ou de subordination de Klein. Une Géométrie de Klein est subordonnée à une autre si le groupe fondamental de la première est un sous-groupe de celui de la seconde. Par exemple, la Géométrie affine est subordonnée à la Géométrie projective, c'est si l'on veut, un chapitre particulier de la Géométrie projective dans lequel on étudie

les propriétés des figures contenant le plan de l'infini; on pourrait, du reste, imaginer une infinité de Géométries affines dans un même espace projectif, suivant le plan auquel on voudrait faire jouer le rôle du plan de l'infini. Si l'on est maintenant dans un espace projectif non holonome, les choses ne se passent plus de la même manière; pour qu'on puisse dans cet espace imaginer une Géométrie affine, il faut qu'on puisse y choisir des repères projectifs liés entre eux suivant une loi affine; pour cela, il est nécessaire et suffisant que le groupe d'holonomie de l'espace soit un groupe affine, ce qui n'arrive pas toujours. D'une manière générale, tout espace non holonome à groupe fondamental  $G$ , admettant pour groupe d'holonomie un sous groupe  $g$  de  $G$ , pourra être regardé comme un espace non holonome admettant pour groupe fondamental tout sous groupe de  $G$  contenant lui-même  $g$  comme sous-groupe. C'est ainsi qu'un espace de Weyl peut être regardé comme riemannien, si son groupe d'holonomie ne contient que des déplacements, sans homothétie.

## IX

Comme on le voit, l'importance de la notion de groupe n'a pas été réduite par les développements récents de la Géométrie différentielle; il semble bien qu'elle seule au contraire soit capable de les embrasser dans une même synthèse. Je voudrais maintenant aussi brièvement que possible, donner un aperçu des services que peuvent rendre à la théorie des groupes elle-même les notions nouvelles de la Géométrie différentielle.

Considérons un groupe de transformations continu  $G$  à  $r$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_r$  et représentons chaque transformation du groupe par un point  $(a_1, \dots, a_r)$  d'un espace à  $r$  dimensions, que nous appellerons l'espace du groupe. Dans un article récent <sup>1</sup>, nous avons, M. Schouten et moi, indiqué comment on pouvait doter cet espace de trois connexions affines remarquables intrinsèquement liées aux propriétés du groupe; j'ai développé plus longuement cette étude dans un mémoire qui vient de paraître <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> E. CARTAN and J. A. SCHOUTEN, *On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups* (Proc. Akad. Amsterdam, 29, 1926; p. 803-815).

<sup>2</sup> E. CARTAN, *La Géométrie des groupes de transformations* (Journal Math., 6, 1927, p. 1-119).