

SUR LES PETITES OSCILLATIONS, D'UN SYSTÈME POSSÉDANT UNE FONCTION DES FORCES, AUTOUR D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE STABLE

Autor(en): **Appell, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21252>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR LES PETITES OSCILLATIONS, D'UN SYSTÈME
POSSÉDANT UNE FONCTION DES FORCES,
AUTOUR D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE STABLE

PAR

Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

On enseigne aujourd'hui, dans tous les cours de Mécanique rationnelle, le théorème de Lejeune-Dirichlet, d'après lequel une position d'équilibre d'un système matériel possédant une fonction des forces U , dans laquelle U est maximum, constitue une position stable. Mais, en supposant que la position du système dont on cherche l'équilibre dépende de k paramètres arbitraires q_1, q_2, \dots, q_k , nuls dans la position d'équilibre considérée et que le maximum correspondant de U soit zéro, le développement de U , par la formule de Mac-Laurin, commence par un groupe φ de termes d'un degré pair quelconque, négatif quels que soient les q_i ;

$$U = -\varphi + U_1 .$$

U_1 étant l'ensemble des termes de degré supérieur.

La demi-force vive du système peut être supposée mise sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \Sigma a_{ij} q'_i q'_j + T_1 , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

où les coefficients a_{ij} sont constants et où la forme quadratique Σ est positive, T_1 désignant une fonction des q_i et des q'_i homogène et du second ordre en q'_i avec des coefficients s'annulant pour

$$q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0 .$$

On suppose habituellement, dans les cours, que φ est une forme quadratique des q_i

$$\varphi = \sum \alpha_{ij} q_i q_j, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

et on néglige U_1 et T_1 . Mais φ peut être d'un degré pair quelconque supérieur à 2; les oscillations du système ont alors une durée qui dépend de leur amplitude. Il est important d'envisager ce cas qui s'impose; c'est ce que j'ai fait sommairement dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. 185, 29 août 1927, pp. 487-489). Nous développerons ici les calculs en supposant φ de degré 4.

Premier cas, $k = 1$. (Système à liaisons complètes). — Nous prendrons

$$U = -\frac{\alpha}{4} q^4, \quad T = \frac{a}{2} \dot{q}^2.$$

L'équation approchée du mouvement est, d'après Lagrange,

$$a q'' = -\alpha q^3 \quad \text{ou} \quad q'' = -r^2 q^3,$$

en posant $\alpha = ar^2$. On en déduit

$$q' = -\frac{r}{\sqrt{2}} \sqrt{q_0^4 - q^4},$$

$$\frac{r}{\sqrt{2}} t = -\int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{q_0^4 - q^4}},$$

avec q_0 valeur de q pour $t = 0$. En faisant $q = q_0 s$,

$$\frac{r}{\sqrt{2}} t = -\frac{1}{q_0} \int_1^s \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}},$$

ce qui donne q par une fonction elliptique de t . Le temps τ que met q partant de q_0 pour devenir nul est

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{r q_0} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^4}};$$

il est en raison inverse de q_0 . Ce cas se présente quand, Oz étant

vertical ascendant, on étudie, dans le voisinage de O, les petits mouvements d'un point pesant mobile sur la courbe

$$y = 0, \quad 4z = x^4.$$

Alors

$$T = \frac{m}{2} x'^2 + \frac{m}{2} x^6 x'^2 = \frac{m}{2} x'^2 + T_1,$$

$$U = -mgz = -mg \frac{x^4}{4}, \quad q = x.$$

Deuxième cas, $k = 2$. — Nous désignerons les deux paramètres par p et q ; alors

$$2T = ap'^2 + 2bp'q' + cq'^2 + 2T_1,$$

et nous prendrons

$$\varphi = \frac{1}{4} (\alpha_1 p^4 + 4\alpha_2 p^3 q + 6\alpha_3 p^2 q^2 + 4\alpha_4 p q^3 + \alpha_5 q^4),$$

$$U = -\varphi + U_1.$$

Les coefficients α_i sont tels que φ soit positif quels que soient p et q . En négligeant T_1 et U_1 on a, pour équations approchées du mouvement,

$$ap'' + bq'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -(\alpha_1 p^3 + 3\alpha_2 p^2 q + 3\alpha_3 p q^2 + \alpha_4 q^3),$$

$$bp'' + cq'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial q} = -(\alpha_2 p^3 + 3\alpha_3 p^2 q + 3\alpha_4 p q^2 + \alpha_5 q^3),$$

les accents désignant des dérivées par rapport au temps.

Il serait intéressant d'intégrer ces équations. Nous nous bornerons à chercher des solutions telles que $p = \lambda q$, λ étant une constante réelle non nulle. Les équations du mouvement sont alors

$$(a\lambda + b)q'' = -q^3(\alpha_1\lambda^3 + 3\alpha_2\lambda^2 + 3\alpha_3\lambda + \alpha_4),$$

$$(b\lambda + c)q'' = -q^3(\alpha_2\lambda^3 + 3\alpha_3\lambda^2 + 3\alpha_4\lambda + \alpha_5),$$

d'où en éliminant q'' : q^3 l'équation biquadratique en λ

$$(a\lambda + b)(\alpha_2\lambda^3 + 3\alpha_3\lambda^2 + 3\alpha_4\lambda + \alpha_5) - (b\lambda + c)(\alpha_1\lambda^3 + 3\alpha_2\lambda^2 + 3\alpha_3\lambda + \alpha_4) = 0$$

dont sont admissibles seulement les racines réelles non nulles rendant positive la quantité

$$\mu = \frac{\alpha_1\lambda^3 + 3\alpha_2\lambda^2 + 3\alpha_3\lambda + \alpha_4}{a\lambda + b} = \frac{\alpha_2\lambda^3 + 3\alpha_3\lambda^2 + 3\alpha_4\lambda + \alpha_5}{b\lambda + c}.$$

Mais cette quantité μ est toujours positive quand λ est réel; car, en ajoutant les deux rapports, après avoir multiplié les deux termes du premier par λ , on obtient

$$\mu = \frac{\alpha_1 \lambda^4 + 4\alpha_2 \lambda^3 + 6\alpha_3 \lambda^2 + 4\alpha_4 \lambda + \alpha_5}{a\lambda^2 + 2b\lambda + c}$$

qui est manifestement positif. On a alors $q'' = -\mu q$ et, pour chacune des oscillations correspondantes, τ varie en raison inverse de q_0 .

On peut remarquer que l'intégration des équations approchées du mouvement se ramène à celle d'une équation du second ordre où figure une constante arbitraire, suivie d'une quadrature.

En effet, en modifiant les cinq coefficients α_i on peut toujours supposer $a = c = 1$, $b = 0$.

Les équations du mouvement

$$p'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad q'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

admettent l'intégrale des forces vives

$$p'^2 + q'^2 = -\varphi + 2h.$$

On a

$$\frac{dp}{dq} = \frac{p'}{q'}, \quad \frac{1}{q'} \frac{d}{dt} \frac{p'}{q'} = \frac{d^2 p}{dq^2} = \frac{p'' q' - q'' p'}{q'^3}.$$

D'après la première de ces équations, celle des forces vives donne

$$q'^2 = \frac{-\varphi + 2h}{1 + \left(\frac{dp}{dq}\right)^2};$$

comme

$$p'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial p}, \quad q'' = -\frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$\frac{d^2 p}{dq^2} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{dp}{dq}}{q'^2} = \frac{\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{dp}{dq}\right] \left[1 + \left(\frac{dp}{dq}\right)^2\right]}{-\varphi + 2h},$$

équation du second ordre donnant p en q ,

$$p = f(q).$$

L'intégrale des forces vives devient alors

$$[1 + f'^2(q)] \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = - \varphi[f(q), q] + 2h$$

ce qui donne t en q par une quadrature.

Si, en général, on suppose que p et q s'annulent en même temps, on a

$$p = \lambda q + \lambda' q^2 + \dots$$

et, en négligeant q^2, q^3, \dots , $p = \lambda q$; on retrouve ainsi les solutions indiquées.

Si l'on suppose $a = c = 1, b = 0, \alpha_4 = 0$, l'équation en λ est, après suppression du facteur λ ,

$$\alpha_2 \lambda^3 + 3 \alpha_3 \lambda^2 + \alpha_5 = \alpha_1 \lambda^2 + 3 \alpha_2 \lambda + 3 \alpha_3 ;$$

elle se réduit au troisième degré et admet toujours une racine réelle.

Si, en outre, $\alpha_2 = 0$, on a une équation quadratique

$$\lambda^2 = \frac{3 \alpha_3 - \alpha_5}{3 \alpha_3 - \alpha_1} ;$$

pour que λ soit réel, il faut que $3 \alpha_3$ soit extérieur à l'intervalle α_1, α_5 .

Si $\alpha_1 = \alpha_5, \alpha_3$ est quelconque. Le cas $a = c = 1, b = 0, \alpha_2 = \alpha_4 = 0, \alpha_1 = \alpha_5$, se présente dans le mouvement d'un point pesant au voisinage de O, point le plus bas de la surface qui a pour équation, Oz étant vertical ascendant,

$$4z = x^4 + 2\alpha x^2 y^2 + y^4, \quad \alpha \leq 1 .$$

Alors

$$2T = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x'^2 + y'^2 + (x^3 + \alpha x y^2)^2 x'^2 + (y^3 + \alpha x^2 y)^2 y'^2 ,$$

$$U = - mgz .$$

Troisième cas, k quelconque. — Les équations approchées du mouvement sont

$$a_{i1} q_1'' + a_{i2} q_2'' + \dots + a_{ik} q_k'' = - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} ,$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

une constante arbitraire, définissant q_2, q_3, \dots, q_k en q , suivie d'une quadrature. On a, en effet,

$$\frac{dq_z}{dq_1} = \frac{q'_z}{q'_1}, \quad (z = 2, 3, \dots, k)$$

$$\frac{d^2 q_z}{dq_1^2} = \frac{q''_z q'_1 - q''_1 q'_z}{q_1'^3} = \frac{q'_z \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - q'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial q_z}}{q_1'^3} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{dq_z}{dq_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_z}}{q_1'^2}$$

Mais, d'après l'équation des forces vives,

$$q_1'^2 \left[1 + \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right)^2 + \left(\frac{dq_3}{dq_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dq_k}{dq_1} \right)^2 \right] = -\varphi + 2h$$

on a $q_1'^2$; alors

$$\frac{d^2 q_z}{dq_1^2} = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{dq_z}{dq_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_z} \right) \left[1 + \left(\frac{dq_2}{dq_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{dq_k}{dq_1} \right)^2 \right]}{-\varphi + 2h},$$

($z = 2, 3, \dots, k$).

Ces équations donnent

$$q_2 = f_2(q_1), \quad q_3 = f_3(q_1), \dots, \quad q_k = f_k(q_1).$$

Puis, l'intégrale des forces vives

$$\begin{aligned} \left(\frac{dq_1}{dt} \right)^2 \left[1 + f_2'^2(q_1) + f_3'^2(q_1) + \dots + f_k'^2(q_1) \right] \\ = -\varphi [q_1, f_2(q_1), \dots, f_k(q_1)] + 2h \end{aligned}$$

donne t en q_1 par une quadrature.

Si l'on suppose que q_1, q_2, \dots, q_k s'annulent en même temps, on a

$$\begin{aligned} q_1 &= \lambda_1 q + \lambda_1' q^2 + \dots \\ q_2 &= \lambda_2 q + \lambda_2' q^2 + \dots \\ &\dots \dots \dots \\ q_k &= \lambda_k q + \lambda_k' q^2 + \dots \end{aligned}$$

en se bornant aux premiers termes,

$$q_1 = \lambda_1 q, \quad q_2 = \lambda_2 q, \dots, \quad q_k = \lambda_k q.$$