SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA CONSTANTE D'EULER

Autor(en): **Appell, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21244

Ce sur quoi l'on ne reviendra jamais assez, c'est l'influence morale, affective, qu'eut Paul Appell sur plusieurs générations de mathématiciens, influence que d'ailleurs il possède toujours. A cet égard, il est unique. Les éloges qu'on lui décerne maintenant et même depuis fort longtemps en écraseraient beaucoup d'autres; vis-à-vis de lui, rien de plus naturel, car on a conscience qu'on ne lui rendra jamais complètement toute la sympathie qu'il rayonnait autour de lui et qui a éclairé tant d'esprit et tant de cœurs. De plus, ce grand homme a souffert; renvoyons aux *Souvenirs d'un Alsacien* (1858-1922) ceux qui ne seraient pas encore complètement éclairés, sur les déchirements d'une âme de frère et de patriote, et répétons que le 12 juin 1927 fut une grande date, un jour de grande fête pour ceux qui croient à la reconnaissance d'une nation et au rôle lumineux de qui nous fit aimer l'Effort.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA CONSTANTE D'EULER

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

On a, en désignant par h un entier positif quelconque et par C la constante d'Euler,

$$C + \log h = H(h) + S(h) \ . \tag{1}$$

Le logarithme est népérien. On a fait

$$H(h) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{h-1} \ ,$$

$$S(h) = (h-1)! \left[\frac{p_2}{h!} + \frac{1!\, p_3}{(h+1)!} + \frac{2!\, p_4}{(h+2)!} + \dots\right]$$

avec

$$p_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x(1-x)\dots(\nu-1-x)}{\nu!}\, dx \ .$$

La fonction S (h) a été donnée, par M. J. Ser, dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (2me Série, t. IV, 1925, p. 127). On a évidemment

$$S(h) < \frac{1}{h}(p_2 + p_3 + \ldots)$$

et, en remplaçant la parenthèse par la valeur 1 donnée par M. Ser,

$$S(h) < \frac{1}{h} .$$

Comme il est d'usage, nous appellerons $E(x)$ le plus grand entier contenu dans x. Quand h croit indéfiniment, $H(h)$ et $EH(h)$ qui n'est jamais égal à $H(h)$ [Voir *Journal de Mathématiques*, 1927, p. 156] croissent indéfiniment.

Soit k une des valeurs entières de h telles que, h variant de $k - 1$ à k, la partie entière $EH(h)$ de $H(h)$ augmente de 1. Comme la même opération fait croître $H(k)$ de $\frac{1}{k-1}$, on a évidemment

$$H(k) - EH(k) < \frac{1}{k-1}$$

car

$$H(k) - H(k-1) = \frac{1}{k-1}, \qquad EH(k) > H(k-1) .$$

Mais, pour $k \geqq 5$,

$$E[H(k) + S(k)] = EH(k) ,$$

car $H(k) + S(k)$ diffère d'un entier n de moins de

$$\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

et $H(k)$ du même entier n de moins encore, ces excès étant donc tous deux moindres que $1:2$.

On a

$$C + \log k = H(k) + S(k) \tag{2}$$

d'où, en prenant les parties entières,

$$E(C + \log k) = EH(k) .$$

Il serait absurde de supposer, pour un seul $k \geqq 5$,

$$E(C + \log k) = E(\log k)$$

car alors on aurait

$$E(\log k) = EH(k)$$

d'où, en retranchant de (2),

$$C + \log k - E(\log k) = H(k) - EH(k) + S(k)$$

ce qui donnerait

$$C + \log k - E(\log k) < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{5} ;$$

alors C serait ou négatif ou moindre que $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{2}$ ce qui est inadmissible. On a donc, pour tous les k,

$$E(C + \log k) = E(\log k) + 1 ,$$
$$E(\log k) + 1 = EH(k) ,$$

d'où, en retranchant de (2),

$$C + \log k - E(\log k) - 1 = H(k) - EH(k) + S(k) < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$$

et

$$1 - C = \log k - E(\log k) - [H(k) - EH(k) + S(k)] = \log k - E(\log k) - \varepsilon$$

si

$$\varepsilon < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} .$$

Alors, si k augmente indéfiniment,

$$C - 1 + \log k - E(\log k) = 0 ,$$
$$1 - C = \lim [\log k - E(\log k)] ,$$

k étant tel que la partie entière de $H(h)$ croisse de 1 quand h varie de $k - 1$ à k. La différence $1 - C$ est alors la limite de la partie décimale de $\log k$, l'erreur étant moindre que $\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$.

Pour $k = 5$,

$$H(5) = 2 + \frac{1}{12} , \qquad H(4) = 1 + \frac{5}{6} ;$$

l'erreur ε est, d'après la théorie générale, moindre que $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$, elle est, en réalité,

$$\varepsilon = \frac{1}{12} + S(k) < \frac{1}{12} + \frac{1}{5} < \frac{3}{10} .$$

On peut aussi prendre $k = 12$; alors l'erreur ε est moindre que

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} < \frac{2}{10} .$$

D'après Gauss (*Œuvres*, t. III), on a

$$C = -\Psi(0) = 0{,}5772 \ldots , \qquad 1 - C = 0{,}421 .$$

Pour $k = 5$,

$$\log 5 - E(\log 5) = 0{,}609$$

qui dépasse $1 - C$ de $\varepsilon = 0{,}188 < 0{,}3$.

Pour $k = 12$,

$$\log 12 - E(\log 12) = 0{,}484$$

qui dépasse $1 - C$ de $\varepsilon = 0{,}063 < 0{,}2$.

On peut retourner le résultat et dire qu'une valeur asymptotique k_n de k est (n entier positif)

$$k_n = e^{n+1-C} , \qquad \lim \frac{k}{k_n} = 1 .$$

On obtient ainsi approximativement

$$k = 227 , \qquad k = 615 , \ldots$$