BIBLIOGRAPHIE

T. Levi-Civita. — **The absolute Differential Calculus.** Edited by Dr. E. Persico. Authorized translation by Miss M. Long. — 1 vol. in-8° de xvi-450 pages. Prix: 21 s. net. Blackie and Son Limited. London and Glascow, 1927.

Ce magnifique volume est la traduction anglaise du *Calcolo differenziale assoluto* déjà analysé dans *L'Enseignement Mathématique* (T. 24; 1924-25, p. 347). Cette simple constatation n'est-elle pas le meilleur éloge que l'on puisse faire de l'ouvrage, celui de l'auteur n'étant plus à faire. Rappelons seulement que M. Levi-Civita enseigne, à l'Université de Rome, la Mécanique rationnelle et que cette science, si constamment en contact avec les applications, prend bien, pour lui-même, une signification, élargie et magnifique, accessible à tous les théoriciens et non pas seulement aux philosophes ayant perdu tout contact avec la réalité. D'ailleurs, dans l'ordre d'idées ici développé, ces philosophes là ont été inventés de toutes pièces par des esprits arriérés et incapables de saisir les formes nouvelles de l'intuition et du bon sens.

Le présent volume ne peut pas être mieux présenté que par un frontispice que nous allons traduire exactement. « Dans l'étude de la Relativité, la « principale difficulté, pour l'étudiant, provient de sa non-familiarité avec « les méthodes du Calcul différentiel absolu (calcul tensoriel). Dans cette « traduction du traité italien de Levi-Civita, le lecteur trouvera une expo- « sition lumineuse et détaillée faite par celui qui a été associé au développe- « ment du sujet plus qu'aucun autre mathématicien vivant. Le professeur « Levi-Civita y a ajouté deux chapitres entièrement nouveaux sur la « Relativité, augmentant ainsi d'un tiers un livre déjà fort complet. »

Parlons seulement ici des deux nouveaux chapitres, les autres ayant été analysés sur l'édition italienne. Cette adjonction ne sera pas absolument sans précédent pour nos lecteurs, notre Revue ayant eu la bonne fortune de publier, en 1920, un article de M. Levi-Civita intitulé: « Comment un conservateur pourrait-il arriver au seuil de la Mécanique nouvelle ? » L'esprit de prudence et de continuité que l'auteur montrait alors est conservé dans le livre anglais; il s'agit bien et de manière très précise, de passer de la « Mécanique » de Lagrange, Jacobi, Hamilton,... à la « Mécanique » d'Einstein sans développements obligés sur l'Electromagnétisme. Ceci ne signifie pas que l'illustre géomètre de Rome dédaigne la Gravifique complète mais il montre que même si l'esprit humain n'avait pas été conduit à cette sublime synthèse, il y aurait encore, rien que dans le domaine de la Mécanique proprement dite, de puissantes raisons de généralisation et d'élargissement. D'ailleurs l'exposé pourrait être relié à l'Electromagnétisme avec la plus grande facilité, ce qu'indiquent notamment la présence de l'optique et le recours initial au Principe d'Hamilton. Ce dernier a une portée générale dépassant de beaucoup la dynamique classique; il peut aussi bien servir à fonder la Cinématique et, pour commencer, celle de Lorentz.

L'auteur recourt également à l'espace-temps mais en montrant toujours comment ses trajectoires, ses géodésiques prennent un sens tangible, en première approximation, dans l'espace ordinaire. Ses considérations d'optique le mènent non à postuler la signification de c (vitesse de la lumière) mais à la découvrir. Il retrouve les équations du mouvement d'un milieu continu rapporté à des axes fixes, les écrit en coordonnées quelconques grâce aux notations si claires et suggestives de son Calcul, les complète suivant les vues d'Einstein et en a finalement toute la généralité avec des ds^2 quelconques dont il examine la détermination *expérimentale* des coefficients. Il n'y a peut-être pas de manière plus physique d'arriver aux équations gravitationnelles de la Relativité générale.

Et la Relativité générale occupe, en effet, un dernier chapitre d'une immense importance. M. Levi-Civita commence par comparer les coefficients d'un ds^2 général avec leurs expressions possibles dans la théorie du potentiel newtonien; il retrouve, avec la plus grande simplicité, le tenseur d'Einstein à divergence nulle; les équations gravitationnelles générales sont obtenues en partant de l'équation de Poisson et le cas stationnaire en lequel

$$ds^2 = V^2 dx_0^2 - a_{ik} dx_i dx_k ,$$

les x ne se rapportant ici qu'à l'espace ordinaire, conduit à des équations réduites, dues à l'auteur lui-même, lesquelles se placent, le plus naturellement du monde, entre la dynamique classique et la Gravifique. Mais voici mieux encore. M. T Levi-Civita reproduit (p. 395) un théorème qu'il a donné aux *Lincei*, en 1926, théorème d'après lequel tout mouvement einsteinien coïncide, jusqu'à la seconde approximation, avec un mouvement newtonien, dans l'espace euclidien, pour lequel l'énergie et le potentiel sont complétés par des termes extrêmement simples qui d'ailleurs s'évanouissent pour c infini. Viennent ensuite le mouvement planétaire à déplacement périhélique, la déflexion de la lumière, le déplacement des raies spectrales. Un paragraphe encore fort intéressant se rapporte à des expressions de la courbure harmonisées plutôt avec les équations de Lagrange qu'avec le symbolisme de Christoffel. Et le volume se termine par l'examen de différentes métriques cosmologiques (Einstein, De Sitter,...) qui, bien entendu ne peuvent être universellement *vraies* toutes à la fois mais qui toutes constituent d'élégantes images de ce que l'Univers peut être. Nous ne pouvons en attendre davantage; la seule indétermination des théories mécaniques permet de conclure à l'indétermination de la cosmologie. Il serait bien dommage qu'il en soit autrement et que quelque vérité(?) définitivement révélée nous empêchat de goûter l'art délicat et prodigieux épandu dans des ouvrages tels que celui que nous venons d'analyser.

A. Buhl (Toulouse).

E. Lainé. — **Précis d'Analyse mathématique à l'usage des Candidats au Certificat de Calcul différentiel et intégral.** Tome I. Théorie des Fonctions de variables réelles; Théorie des Fonctions analytiques. — 1 vol. de VIII-232 pages et 58 figures. Prix: 25 francs. Vuibert, Paris, 1927.

Ce premier volume, comportant une préface de M. G. Bouligand, pourrait être présenté rien que par reproduction de cette préface. Nous allons essayer d'être un peu plus original sans pouvoir toutefois émettre de meilleures idées. Il s'agit d'un Précis d'Analyse étroitement soudé aux Mathématiques générales, s'adressant à des élèves encore novices mais très justement supposés dans un excellent état de réceptivité.

Il débute par des Compléments d'Algèbre et de Géométrie analytique en lesquels on glisse rapidement sur le Théorème de Bezout et l'élimination. Le rôle des éléments imaginaires liés avec l'homographie, les courbes algébriques, etc. fait déjà présager un heureux usage du symbolisme, même le moins tangible comme celui des droites isotropes et des points cycliques, dans des questions finalement réelles. L'avenir de la Science est là; ces notions imaginaires le sont encore plus que celles d'espaces non-euclidiens à n dimensions, elles peuvent y conduire et quand tout le monde aura bien compris que nous pouvons lier le réel au réel par des intermédiaires dépourvus de réalité physique, bien des querelles tomberont d'elles-mêmes.

Les fonctions de variables réelles débutent par une analyse brève mais des plus justifiées de la notion de continuité. Quel autre sujet de tourment ! L'observation physique révèle la discontinuité de toutes parts et notre analyse, développée en toute ingénuité, considérerait volontiers la continuité comme une notion première ! Sur cette notion il faudra sans doute encore s'appuyer beaucoup et longtemps mais un peu de défiance préliminaire ne messied pas. Après l'intégrale suivant les idées de Darboux, Riemann,... nous trouvons les séries *réelles* de Taylor et de Fourier étroitement rapprochées. Les difficultés concernant la continuité sont examinées derechef sur les fonctions de plusieurs variables.

A propos des fonctions implicites nous trouvons l'élégante analyse des déterminants fonctionnels puis les notions d'*extrema libres* ou *liés* éclaircies par le procédé taylorien et suivies d'un élégant problème relatif aux lignes polygonales inscrites.

Le Calcul intégral, toujours réel, se poursuit avec la petite formule de Green-Riemann, génératrice de tant de choses, les périodes des intégrales curvilignes, la réduction des intégrales elliptiques d'où l'on passe aux intégrales eulériennes, celles-ci donnant si aisément des résultats d'intégrations simples ou multiples que la théorie imaginaire et les lacets ne donneraient qu'à un calculateur beaucoup plus exercé. Suit, en cinq pages, un premier mais excellent aperçu sur le Calcul des variations. Le changement de variables dans les intégrales multiples est l'occasion de revenir élégamment sur la multiplication des jacobiens et de terminer le Premier Livre par les formules de Green, de Stokes et d'Ostrogradsky. Vingt-cinq exercices des mieux choisis sont ici placés; pour y parvenir il n'aura fallu que 135 pages d'étude et cependant les élèves qui les résoudront auront déjà le sentiment de pouvoir aller loin.

La Théorie des Fonctions analytiques débute par des exemples de fonctions uniformes ou multiformes construites par des symboles élémentaires, tels ceux des fonctions circulaires directes ou inverses, et suivies par continuité le long de chemins remarquables. Puis vient le rôle fondamental de la série de Taylor et l'intégration résiduelle toujours exposée avec intérêt et ingéniosité. Aux cas de multiformité correspondent des idées sommaires sur la périodicité des intégrales elliptiques et hyperelliptiques. Un appendice situe la question du prolongement analytique et montre ce qui, dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables, peut être considéré comme l'analogue de ce qui a été précédemment exposé dans le cas de la variable unique.

Le volume se termine sur une nouvelle collection de 19 exercices tous empruntés cette fois à des textes d'examens; c'est un parfait instrument de travail pour qui hésiterait devant un gros Traité d'Analyse tant à cause de son prix que de la crainte de s'y perdre. A. Buhl (Toulouse).

A. Sainte-Laguë. — **Les Réseaux** (ou Graphes). (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XVIII). — 1 fascicule grand in-8° de 64 pages. Prix: 16 fr. 80 net. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Ceci est, par excellence, de la Géométrie de situation attrayante, délicate et devenue fort savante. Les jeux lui ont donné naissance en grande partie mais la Nature se joue aussi de juxtapositions de toutes sortes souvent très mystérieuses et impossibles à dénombrer pratiquement, même dans les cas où il est évident que le dénombrement ne peut conduire qu'à un nombre fini. La structure des cristaux, la composition de la molécule, l'arrangement des symboles ou des indices dans les formules chimiques ordinaires ou stéréochimiques aussi bien que dans les formules de la pure algèbre, voilà de quoi tenter l'esprit mathématique le plus esthétique.

Les *réseaux* ou *graphes* peuvent d'abord être considérés comme ayant une existence naturelle dans les cartes géographiques (auxquelles se joint déjà le redoutable problème du coloriage par un nombre minimum de couleurs), dans les voyages combinés où il n'est pas permis de passer deux fois sur le même fragment d'itinéraire (figures d'un seul trait), etc.

Mais ceci serait encore d'une portée assez restreinte si une infinité de problèmes topologiques, qu'on peut se poser dans l'espace ordinaire et même dans l'hyperespace, ne pouvaient se ramener, en fin de compte, à la considération de certains graphes. Ceux-ci ont un long catalogue de singularités, leurs diverses particularités donnent aussi une terminologie très étendue. La théorie fait apparaître de l'inconnu, peut-être même de l'inconnaissable sous les apparences les plus simples, par exemple dans la question du repliement sur un seul timbre d'une bande de n timbres-poste; on ne peut dire actuellement de combien de manières ce repliement est possible !

L'intérêt d'œuvres aussi étendues que, par exemple, celle d'Edouard Lucas est condensé ici de la manière la plus heureuse. Bien des résultats sont dus à M. Sainte-Laguë lui-même et personne, à coup sûr, n'était mieux qualifié pour écrire ce fascicule. Parmi les auteurs mentionnés, on relève nombre de noms d'amateurs qui, sans grande préparation, n'ont guère cultivé que l'amusement mathématique facile à aborder, au moins en apparence, mais on trouve aussi Cayley, Clifford, Cremona, Euler, Hadamard, Halphen, Hermite, Kronecker, Petersen, Poincaré, Sylvester, Tait,... que je ne citerai que dans cet ordre ou plutôt ce désordre alphabétique. Les dieux régissant l'Univers, suivant la conception hellène, ont dû aussi certainement et forcément penser en réseaux. A. Buhl (Toulouse).

R. Lagrange. — **Calcul différentiel absolu** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XIX). — 1 fascicule gr. in-8° de 40 pages. Prix: 16 fr. 80 net. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

A côté de la double édition italienne et anglaise, plus volumineuse et due à M. T. Levi-Civita, c'est-à-dire à l'un des créateurs même du Calcul différentiel absolu, signalons avec empressement l'œuvre réduite mais éminemment esthétique de M. R. Lagrange.

Ce jeune et brillant auteur se place surtout au point de vue analytique; la géométrie des variétés de Riemann s'insère ensuite dans un cadre qui peut jouer d'autres rôles générateurs. Il faut surtout signaler, dans cet ordre d'idées, le Calcul pfaffien absolu. On sait, en effet, que les différentielles dx_i, au sens archaïque de l'expression, ont une foule de propriétés couramment employées, par exemple dans les transformations d'intégrales multiples, en lesquelles n'intervient pas leur caractère de différentielle exacte; on peut alors les remplacer par des formes de Pfaff quelconques. Une discrimination attentive, sur un tel point, constitue un grand progrès pour la Science, progrès dont l'école française peut être particulièrement fière car il est surtout dû aux travaux de M. Edouard Goursat et de M. Elie Cartan. Ce dernier géomètre, en reprenant la notion de *courbure* et en créant celle de *torsion*, avec l'aide des formes de Pfaff, a projeté une vive lumière et mis en évidence une simplicité inattendue dans des théories géométriques qui dépassent de beaucoup l'étendue physique des théories einsteiniennes. L'univers *affine* est, si l'on veut, celui des différentielles classiques; l'univers *à connexion affine* est le monde pfaffien, le nouveau monde, dont certains ont parlé d'ailleurs avec un mépris ressemblant fort à celui montré jadis par les détracteurs de Christophe Colomb. Que reste-t-il, à l'heure actuelle, dans le monde véritablement savant, de cette disposition d'esprit rétrograde ? Aujourd'hui M. Lagrange écrit en toute simplicité: « Grâce à l'emploi du « calcul, l'étude de tout phénomène variable est assimilable à l'étude d'une « variété géométrique et c'est au langage géométrique que l'on emprunte « la nomenclature et les représentations dont on a besoin ». Tout phénomène variable ! On ne saurait mieux dire et une telle affirmation constitue maintenant de la science faite et bien faite. Les lecteurs de M. Lagrange s'en apercevront avec la plus grande facilité.

A. Buhl (Toulouse).

A. Bloch. — **Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XX). — 1 fascicule gr. in-8° de 62 pages. Prix: 16 fr. 80 net. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1926.

Ce beau fascicule condense les étonnants résultats donnés par la Théorie des fonctions depuis, en somme, un petit nombre d'années. Le théorème initial que donnait M. Emile Picard, aux environs de 1880, devait rester longtemps isolé, dans une méconnaissance presque complète de sa véritable signification; on était trompé par la distinction entre la fonction *transcendante* entière et la fonction entière des générations précédentes qui n'était jamais qu'un polynome. Certes, dans le voisinage d'un point essentiel, que le polynome ne possède pas, les différences sont grandes et nombreuses mais on avait tort de conclure de là à des modes de variation très différents dans les autres régions. L'idée qu'une riche moisson de théorèmes pouvait être obtenue en ne considérant dans une série entière que les n premiers termes, n étant fini, semblait un non sens. Le cercle-unité n'est pas, en général, un cercle de convergence, ni même de méromorphie; c'est surtout une région *finie* dans laquelle la fonction est comparée à un polynome ou à une fraction rationnelle. M. Bloch se révèle tout à fait supérieur dans ces comparaisons; il tient à justifier l'adage célèbre: *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito* dont il a d'ailleurs fait part déjà aux lecteurs de *L'Enseignement Mathématique* (T. XXV, 1926, p. 84). Il lui semble naturel d'aller aux propriétés de la série entière par celles de n termes, quand n croît indéfiniment. Outre qu'il défend cette idée avec un talent très personnel et très grand, il a aussi celui d'agglomérer à son idée directrice un nombre considérable de travaux que l'on pourrait croire fort disparates. Il pénètre profondément dans la théorie des fonctions à valeurs lacunaires, révèle la nature intime du théorème de Picard-Landau; c'est presque stupéfiant: le point de vue *algébrique* doit demeurer fondamental pour toutes les extensions même celles à venir pour lesquelles l'auteur fait des prophèties aussi ingénieuses que vraisemblables. Les plus fameux auteurs cités et analysés sont Bieberbach, Borel, Boutroux, Carathéodory, Hadamard, Jensen, Julia, Landau, Lindelöf, Montel, Nevanlinna (F. et R.), Ostrowski, Picard, Riesz, Valiron, Wiman. Tous prennent élégamment place dans un exposé lumineux et homogène. A. Buhl (Toulouse).

M. Janet. — **Les systèmes d'équations aux dérivées partielles** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXI). — 1 fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix: 16 fr. 80 net. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1927.

Le premier mérite de ce fascicule est sans doute d'effectuer un utile rapprochement. La théorie des équations aux dérivées partielles a rencontré en France des adeptes d'une valeur de premier ordre tels que MM. Goursat et Cartan. Un autre groupe peut être formé des noms de Méray, de M. Riquier et de Delassus. Or le second groupe a toujours passé pour éloigné du premier et même des théories classiques; on lui attribuait une originalité trop grande et surtout trop spéciale. Ceci tenait à un certain dédain manifesté, surtout par Méray, pour la forme des résultats déjà acquis et par l'emploi réciproque d'une terminologie qui, pour être correcte, n'en semblait pas moins bizarre. M. Maurice Janet, déjà dans sa Thèse, a tenté, non sans succès, une intéressante fusion; il la précise à nouveau et nous présente maintenant une théorie des systèmes aux dérivées partielles qui est vraiment d'une fort belle harmonie. Il étudie d'abord les questions de compatibilité ou d'intégrabilité puis, la chose étant supposée acquise, la détermination d'une solution par des données appropriées. C'est partir des théorèmes généraux de Cauchy et de Madame de Kowalevsky. Les solutions *régulières* sont celles qui se présentent naturellement sous forme de séries de Taylor mais elle ne sont d'abord valables, en général, que dans certaines régions et demandent un *prolongement*.

Il fallait autrefois un courage tout spécial pour débrouiller les théorèmes d'existence; maintenant ils sont devenus symétriques et contiennent d'élégantes identités (p. 9). Les dérivées d'ordre quelconque sont caractérisées par leur seul dénominateur $dx^{\alpha}\, dy^{\beta}\ldots$, qu'on peut réduire symboliquement au monome $x^{\alpha}\, y^{\beta}\ \ldots$, et ceci donne lieu à un calcul également symbolique qui simplifie considérablement les choses, notamment en ce qui concerne la notion d'involution.

Les résultats généraux à la Cauchy ne vont point sans la théorie des *caractéristiques* qui correspondent précisément à des circonstances exceptionnelles d'indétermination et, comme il arrive toujours en mathématiques, ce sont ces singularités qui éclairent le reste d'une manière particulièrement claire. Citons ici Beudon, Hadamard, Gunther. Nous terminons avec les systèmes de Pfaff particulièrement approfondis par M. Cartan et si nécessaires en la géométrie des espaces affines ou à connexion affine, dans la théorie des groupes, etc. La théorie de M. Cartan admet d'ailleurs une sorte de théorie corrélative due à M. Vessiot. Et toute cette belle analyse est celle qui aujourd'hui conditionne impérieusement la Physique mathématique.

A. Buhl (Toulouse).

L. Godeaux. — **Les transformations birationnelles du plan** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXII). — 1 fascicule gr. in-8° de 58 pages. Prix: 16 fr. 80 net. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1927.

M. Lucien Godeaux, Professeur à l'Université de Liége, est bien connu pour ses travaux de géométrie algébrique. Il nous donne ici un fascicule, peu encombré de formules, où l'on poursuit bien, sans figures, une géométrie: celle dont le groupe principal est formé de transformations birationnelles. Celles-ci font correspondre à un réseau de droites un réseau *homaloïdal* dans lequel deux courbes variables ne se rencontrent, comme les droites du réseau rectiligne, qu'en un seul point variable. Il est clair que la construction de la transformation ou celle du réseau homaloïdal sont choses équivalentes. L'auteur commence par le réseau, d'où des généralités sur les intersections de courbes algébriques et la manière dont les singularités de ces courbes influent sur le dénombrement des intersections libres.

La plus simple des transformations birationnelles est homographique; viennent ensuite les transformations quadratiques avec leurs réseaux homaloïdaux formés de coniques. Les réseaux dépendent d'un système arithmétique de deux équations très simples, l'une linéaire, l'autre quadratique (p. 14); ceci rappelle la théorie générale des groupes continus avec ses deux types de relations de structure. Toute transformation birationnelle est le produit d'un nombre fini de transformations quadratiques.

Il n'y a guère besoin d'en dire davantage pour caractériser une théorie qui repose indéniablement sur des idées fort élégantes. Jusqu'ici ce ne sont que des géomètres d'un véritable talent qui, en dehors de l'homographie et de l'inversion, ont manié des transformations birationnelles: Castelnuovo, Cayley, Chisini, Clebsch, Cosserat, Cremona, De Jonquières, Enriques, Halphen, Kantor, Montesano, Nœther, Picard, Puiseux, Segre, Severi,...

Des ouvrages classiques français ont grandement insisté sur leur importance; ne citons que la *Théorie des Fonctions algébriques de deux variables* de MM. E. Picard et G. Simart et la *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales* de MM. P. Appell et E. Goursat. L'excellent fascicule de M. L. Godeaux précisera très esthétiquement les idées nouvelles se rapportant au sujet.

A. Buhl (Toulouse).

P. Appell et J. Kampé de Fériet. — **Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite.** — 1 volume in-4° carré de VIII-434 pages. Prix: 140 fr. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1926.

Cet ouvrage est comme le couronnement d'une carrière illustre pour M. Paul Appell, ce qui ne va pas naturellement sans un grand honneur pour son jeune collaborateur M. J. Kampé de Fériet.

Les recherches de M. Appell sur le sujet remontent presque à un demi-siècle et elles étaient éparses jusqu'ici dans de nombreux Mémoires; le fascicule III du Mémorial des Sciences mathématiques, en nous en donnant un bref aperçu, nous a donné aussi le désir d'approfondir un sujet aussi vaste qu'esthétique et ce désir peut, maintenant, être magnifiquement exaucé.

Le grandiose exposé d'aujourd'hui est divisé en trois parties. La première partie est consacrée aux Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. Il est naturel de commencer par celles d'une seule variable, c'est-à-dire par la série hypergéométrique ordinaire dont les propriétés essentielles sont résumées, avec une rare élégance, en une douzaine de pages, propriétés immédiatement étendues ensuite au cas de deux variables. Les premiers instruments de représentation sont des séries entières susceptibles d'être accompagnées de leur prolongement analytique; les seconds sont des intégrales définies en lesquelles les fonctions hypergéométriques naissent de manière curieuse de l'intégration de certaines combinaisons de la fonction Γ. Le calcul des résidus intervient ici d'une manière remarquablement simple. Il y a ensuite des équations aux dérivées partielles vérifiées par les fonctions en litige; ces équations sont linéaires et sont de celles dont l'intégration peut être complétée quand on en connaît des solutions particulières, ici hypergéométriques. Les équations *adjointes* sont aussi en relations simples avec les équations initiales; il est même aisé de construire, en particulier, des équations identiques à leur adjointe. On sait, d'autre part, que Riemann a défini la fonction hypergéométrique d'Euler et de Gauss comme fonction d'une variable complexe avec trois points critiques, que ceci est l'origine des travaux de M. Emile Picard sur la fonction modulaire, travaux qui devaient renouveler complètement la théorie des fonctions. Or il y avait quelque chose d'analogue à faire dans le cas de deux variables et c'était ouvrir une nouvelle voie vers les fonctions fuchsiennes et hyperfuchsiennes.

Il y a deux modes de *réduction* des fonctions hypergéométriques à deux variables; il s'agit de lier ces variables dans un but de vérification, quant à une équation différentielle *réductrice*, ou dans un but de rationalisation. La fonction de Gauss pouvant se réduire à des polynomes, il était indiqué de rechercher la généralisation constituée par les polynomes hypergéométriques à deux variables; les propriétés d'orthogonalité peuvent être étendues à ceux-ci.

Des fonctions hypergéométriques à n variables ont été construites par M. Loricella mais peut être trouve-t-on plus d'intérêt encore du côté des *dégénérescences* des fonctions pour lesquelles n est égal à 2. Ces dégénérescences sont comparables à celles qui donnent par exemple la fonction de Bessel en partant de celle de Gauss. Il faudrait maintenant insister longuement sur les fonctions d'ordre supérieur; dans le cas d'une variable, une fonction F (x) peut être définie par une série en $a_n x^n$ en laquelle le rapport de deux coefficients consécutifs est une fraction rationnelle en n. Alors F satisfait à une équation différentielle linéaire. Peut-on construire une théorie analogue pour des F (x, y) avec des polynomes en m, n ? Oui, et c'est là ce qui est d'une très grande importance, mais pas sans une étude serrée de conditions de compatibilité à laquelle M. Kampé de Fériet a apporté lui-même les plus sérieuses contributions. Ce sont de telles extensions qui montrent tout ce qu'il y avait de fécondité latente dans les cas précédemment développés.

Passons à la seconde partie: Fonctions hypersphériques et polynomes d'Hermite. Elle débute par l'équation de Laplace à n variables avec ses invariances, ses solutions à constantes arbitraires si remarquables comme celle où interviennent les distances d'un point de l'hyperespace à n hyperplans rectangulaires. Ici la formule de Green, les transformations d'intégrales multiples sont largement mises à contribution; comme toujours, l'arsenal fondamental de la Physique mathématique touche aux principes de l'Analyse. L'équation de Laplace est toujours vérifiable par des polynomes qui, sur l'hypersphère de rayon unité, donnent les fonctions hypersphériques; celles-ci comportent d'abord une dissymétrie qui provient de celle des coordonnées polaires spatiales. Les coordonnées *zonales* y remédient heureusement. C'est alors qu'apparaissent deux catégories de polynomes à n variables, catégories jouant, l'une par rapport à l'autre, un rôle réciproque et s'imposant toutes deux à la fois quant au développement d'une fonction arbitraire. De tels polynomes furent d'abord construits par Hermite qui trouve dans la théorie le pendant du procédé de Göpel et Rosenhain pour passer des séries elliptiques de Jacobi aux séries analogues concernant les fonctions abéliennes. C'était déjà prodigieux et cependant ce n'était pas la théorie des fonctions harmoniques; le lien n'a été véritablement établi que par les auteurs du présent ouvrage. Ces rapprochements sont d'une élégance extrême; on y comprend fort bien, par exemple, l'emploi de la solution harmonique à n hyperplans rectangulaires.

Quant aux fonctions arbitraires à développer suivant les polynomes en question, nous en trouvons des exemples explicites: polynomes homogènes. exponentielles. Ceci est d'ailleurs en relation avec le problème de Dirichlet pour le domaine intérieur à une hypersphère; les fonctions hypersphériques générales permettent de résoudre le même problème tant extérieur qu'intérieur. Enfin les deux catégories de polynomes à n variables sont reprises dans un chapitre spécial, pour n égal à 2. Les fonctions hypersphériques s'expriment toujours très simplement par les fonctions hypergéométriques; en cette assertion apparaît encore le mérite personnel de M. Kampé de Fériet qui a consacré sa Thèse à la fusion des deux ordres d'idées.

Une troisième et dernière partie a trait aux polynomes d'Hermite dérivés d'une exponentielle. C'est là encore une construction très originale d'Hermite; avec les polynomes précédemment étudiés, c'est le cas limite qui correspond au potentiel dans un espace à un nombre infiniment grand de dimensions. Ce cas fait naître des équations aux dérivées partielles diverses, telles celles qui sont relatives à la propagation de la chaleur; les nouveaux polynomes ont de curieuses propriétés symboliques, ils admettent une sorte de formule d'addition, ils se prêtent aussi, par leurs propriétés d'orthogonalité, à des développements à la Fourier. On peut leur adjoindre des fonctions de seconde espèce, de manière à intégrer complètement une certaine équation différentielle linéaire du second ordre. Enfin tout ceci se généralise en passant, de l'unique terme quadratique de l'exponentielle, à une forme à n variables.

Six notes terminent le volume. Je signalerai surtout celle qui est relative à la résolution des équations algébriques par des fonctions hypergéométriques. M. R. Birkeland s'est illustré dans la question qui apparaît comme fondée sur une idée simple: résolution de l'équation par la série de Lagrange et décomposition de cette série en somme de séries hypergéométriques. Notons encore la question des quadratures mécaniques qui, dans le cas de

n variables comme dans le cas d'une seule, suffit à imposer des polynomes à propriétés intégrales orthogonales.

Et voici, sans formules, c'est-à-dire très imparfaitement, une impression d'ensemble sur un livre magnifique né du désir d'étendre les propriétés du joyau analytique constitué par la série hypergéométrique ordinaire; il a fallu, chemin faisant, refondre et généraliser celles, non moins élégantes, du potentiel newtonien. Et, comme les savants auteurs le font remarquer, c'est surtout l'Ecole française qui a pris la plus grande part à l'érection du merveilleux monument. A. Buhl (Toulouse)

R. Ferrier. — **Quelques idées sur l'Electrodynamique.** Théories nouvelles sur l'Oscillateur de Planck et le Mouvement autonome. Préface de M. Paul Painlevé. — 1 fascicule in-8° de 48 pages. A. Blanchard. Paris 1927.

M. Paul Painlevé, dans la préface de ce fascicule, nous rappelle que l'histoire des développements fondamentaux de l'électrodynamique répond, très en raccourci, au schème:

$$\text{Faraday,}\quad \begin{cases} \text{Ampère,} \\ \text{Maxwell, Lorentz, Einstein et les relativistes,} \\ \text{Helmholtz.} \end{cases}$$

Ceci est une croix dont la majorité des théoriciens a parcouru la branche horizontale. La branche verticale, beaucoup moins développée est cependant susceptible de prolongement et c'est dans cette direction que travaillerait M. Raoul Ferrier. Sa théorie est une théorie de structure; l'éther est un substratum sans position mais où l'on peut considérer des configurations déterminées elles-mêmes par des distances. Nous avions déjà, en géométrie, des systèmes fondés sur cette seule notion de distance; il n'est évidemment pas impossible d'imaginer des systèmes mécaniques bâtis de même, tels d'ailleurs ceux d'Einstein avec des ds^2 et des rayons de gravitation tenant lieu de masses. Les conceptions atomiques ou corpusculaires sont alors une nécessité de raison; ce qu'il y a de saisissable dans l'espace physique est naturellement ponctuel et, par suite, discontinu. Le continu, l'éther, au fond, sont amorphes; ce n'est pas en eux qu'il faut chercher des images représentatives. Vraiment, il semble bien que ceci puisse s'accorder avec d'autres conceptions, d'autant plus, qu'en passant par Maxwell, l'auteur côtoie Lorentz et sa fameuse transformation qu'il propose de compléter par un système analogue qu'il dit *préquantique* comme entraînant des *points critiques.* Tout ceci est audacieux, mais est d'une analyse simple. Avec M. Painlevé, nous proposons, sans jugement préconçu, d'attendre des résultats contrôlables. Et il serait à souhaiter que tous les ingénieurs qui se mêlent de physique théorique montrent un talent analogue à celui de M. Ferrier. A. Buhl (Toulouse).

N.-E. Nörlund. — **Leçons sur les séries d'interpolation** rédigées par René Lagrange (Collection E. Borel). — 1 vol. gr. in-8° de VIII-236 pages. Prix: 56 fr. Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1926.

La Collection de Monographies publiée sous la direction de M. Emile Borel vient encore de s'enrichir d'une véritable merveille. Qu'on ne se trompe pas, d'après le titre de l'ouvrage, comme j'ai commencé par le faire, en pensant à des méthodes d'interpolation signées de noms illustres mais représentant un ordre d'idées assez spécial. Pour M. Nörlund l'interpolation est un point de départ avec lequel il semble qu'on puisse atteindre toutes les parties de la Théorie des fonctions et ce avec les ressources les plus générales telles celles des variables complexes et des procédés de Cauchy.

C'est d'abord la formule d'interpolation de Newton qui entre en lice. Elle est rendue extrêmement symétrique par des notations appropriées et l'intégrale de Cauchy intervient tout de suite quand à l'expression du *reste*; la généralité est déjà telle qu'on peut alors apercevoir les séries de Gauss, Stirling, Bessel. La série de Stirling est une série de polynomes dont chacun est décomposé en facteurs; elle est propre à la représentation de fonctions entières qui sont alors de croissance minima. Pour aller plus loin, il faut invoquer les recherches de M. J. Hadamard sur la série de Taylor; on peut adjoindre, à toute série de Stirling, une intégrale introduite par Laplace en Calcul des probabilités; la fonction hypergéométrique fournit alors des exemples remarquables et l'on est sur la voie d'une expression majorant la F (z) à représenter. Ceci n'empêche pas M. Nörlund de déclarer que la série de Stirling est d'application restreinte et que la série de Newton va nous donner mieux. C'est naturellement l'élémentaire formule d'interpolation de Newton qui donne naissance à la série et celle-ci s'applique à toute fonction holomorphe à l'infini, le développement subsistant d'ailleurs dans de nombreux cas où l'infini est un point singulier. Il y a aussi d'importants rapprochements à faire avec les théories de Dirichlet, notamment quant aux demi-plans de convergence; notons aussi que la série de Newton peut représenter zéro sans disparaître identiquement, qu'elle ne converge pas absolument partout où elle converge ce qui entraîne la recherche d'intéressantes transformations permettant d'obtenir la convergence absolue.

Moyennant une inégalité de nature exponentielle, une F (z) holomorphe dans un demi-plan admet un développement en série de Newton valable également dans un demi-plan. Les séries hypergéométriques, qui donnaient déjà des séries de Stirling, donnent des séries de Newton plus élégantes encore.

Passons aux séries de *facultés*. C'est, comme plus haut, l'occasion de remonter jusqu'à Laplace qui emploie déjà le terme. La comparaison est d'ailleurs facile avec les séries de Newton et il y a toujours un théorème fondamental entre une F (z) développable en série de facultés et une intégrale donnée par Laplace.

Les expressions limites employées sont en rapport avec la fonction Γ puis avec les fonctions à croissance angulaire employées par divers géomètres, notamment par M. Mittag-Leffler, dans la théorie du prolongement analytique. M. Borel avait d'ailleurs appuyé sur quelque chose d'analogue sa méthode de sommabilité exponentielle. Si nous ajoutons que les séries de facultés se prêtent aux diverses opérations analytiques, sinon aussi facilement que les séries entières du moins en vertu de règles qui peuvent être précisées et le sont effectivement par M. Nörlund, nous aurons bien montré l'extrême généralité de l'exposé. L'idée essentielle est simple: partir des formules élémentaires et *finies* de l'interpolation pour leur substituer des séries infinies. Or cette idée, comme nous l'indiquions en commençant, atteint bien toutes les subtilités de la théorie des fonctions.

M. Nörlund a tenu à commencer sa préface en disant beaucoup de bien de son rédacteur M. René Lagrange. Ne soyons pas moins juste et reconnaissons que le jeune et brillant maître de conférences de l'Université de Lille qui a déjà montré tant de compétences en d'autres domaines, comme par exemple le Calcul différentiel absolu, n'en a pas montré moins en celui-ci.

A. BUHL (Toulouse).

J. HADAMARD. — **Cours d'Analyse** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I Second fascicule. — 1 fasc. gr. in-8° de XXXII-288pages. J. Hermann Paris, 1927.

Nous avons rendu compte l'an dernier (p. 142) du premier fascicule de 336 pages; le second complète le Tome I d'un Cours qui soutient plus que dignement la comparaison avec ceux de Jordan et de Humbert. Nous prenons maintenant le volume complet au début des Applications géométriques du Calcul différentiel, à la théorie du contact suivie immédiatement de celle des enveloppes.

L'idée de caractéristique y est développée dans toute sa généralité et conduit à l'arête de rebroussement non considérée comme un privilège des surfaces développables. Suivent les élégantes théories des congruences et surtout des transformations de contact présentées brièvement sous les formes les plus connues. Dans l'étude des courbes et des surfaces, l'auteur a introduit, réduite au strict nécessaire, la notion de trièdre mobile si savamment maniée par Gaston Darboux. Il en est résulté une grande homogénéité et un facile emploi des coordonnées curvilignes. Les lignes asymptotiques, les lignes de courbure sont richement illustrées par toutes les surfaces se prêtant aisément à la détermination de ces lignes (surface réglées, hélicoïdes, etc.). La représentation des surfaces les unes sur les autres commence par une étude rigoureuse de l'applicabilité sur le plan. Le ds^2 général en u et v ne peut pas se mettre sous la forme $dx^2 + dy^2$; il n'est pas *euclidien* ce qui n'empêche pas la surface d'exister dans l'espace euclidien à trois dimensions. Excellente leçon pour ceux qui croient encore que le non-euclidien est irréel. Ces pages attachantes se terminent avec les cartes géographiques et les représentations conformes.

Passons aux Applications géométriques des intégrales multiples. Après l'aire gauche dont la définition, quoiqu'on fasse, n'est pas exempte de difficulté, nous abordons les fameuses transformations d'intégrales multiples, les formules d'Ostrogradsky, de Riemann, de Stokes, l'attention étant attirée sur le cas des domaines à plusieurs frontières. De même une notation différentielle due à Méray oriente les aires ainsi que leurs contours; elle fait tomber immédiatement bien des ambiguïtés et on peut s'étonner avec M. Hadamard, qu'elle ne soit pas plus connue. Il semble aussi que la multiplication *extérieure* des différentielles, défendue à l'heure actuelle surtout par MM. Goursat et Cartan puisse rendre les mêmes services. C'était également le cas de parler des indices de Gauss relatifs aux contours à boucles enchevêtrées; M. Hadamard l'a fait avec concision. Suit une magnifique application: la formule d'Ossian Bonnet et le théorème de Gauss sur la somme des angles et la courbure totale d'un polygone géodésique. Nouvelle ouverture, des plus importantes, sur la géométrie non-euclidienne. La formule de Stokes est ramenée à la formule de Riemann par l'usage des coordonnées curvilignes u et v. Un chapitre spécial interprète, dans les champs de vecteurs, l'essentiel des résultats précédents; on y trouve avec plaisir le *gradient* ou *nabla* ∇ qui fait tout de suite penser à l'équation de Laplace, aux fonctions harmoniques, bref à des choses qui ne demandent qu'à naître des précédentes transformations d'intégrales multiples. Tout ceci est déterminé par l'examen des champs à discontinuités et par la variation des intégrales multiples lors de déformations continues des frontières de ces champs.

La dernière partie du volume se rapporte aux Règles de Calcul élémentaires relatives aux équations différentielles. Ce titre dit bien ce qu'il veut dire. Il ne s'agit pas ici de théories spéciales et élevées, pas même de théorèmes d'existence souvent bien fatigants pour le néophyte. Il ne s'agit que des méthodes élémentaires d'intégration ou d'abaissement d'ordre. Les équations linéaires sont examinées avec leur signification physique (résonance, amortissement) et nous terminons par une équation du premier ordre fort esthétique quoique souvent oubliée, celle de Jacobi.

Parmi les quatre notes qui s'adjoignent à cet exposé signalons particulièrement la dernière sur la géométrie affine. C'est là la science actuellement en élaboration et combien prometteuse !

Disons aussi que ce second fascicule contient 32 pages de Notions préliminaires qui, dans le volume complet devront, bien entendu, former un avant-texte paginé d'ailleurs en chiffres romains. Ce sont les Mathématiques générales nécessaires à la compréhension d'une œuvre également satisfaisante pour l'analyste et pour le praticien, d'une œuvre qu'on serait porté à déclarer vraiment polytechnique même si des traditions célèbres n'avaient point appliqué déjà cet adjectif, avec un grand P, à une Ecole illustre, toujours illustrée d'ailleurs par des professeurs tels que M. Jacques Hadamard.

A. Buhl (Toulouse).

F. Gonseth. — **Les Fondements des Mathématiques.** De la Géométrie d'Euclide à la Relativité générale et à l'Intuitionisme. Préface de M. Jacques Hadamard. — 1 vol. gr. in-8° de XII-244 pages. Prix: 25 fr. A. Blanchard, Paris, 1926.

Ce livre a déjà eu un grand retentissement. M. G. Juvet en a notamment publié une analyse toute spéciale, dépassant le cadre des articles bibliographiques ordinaires, dans la *Revue générale des Sciences* du 15 mars dernier. M. Jacques Hadamard, tout en déclarant dans sa préface qu'il se range parmi les endurcis qui trouvent l'Analyse claire telle qu'elle est, n'en incite pas moins à parcourir ces pages qui examinent de manière pénétrante les postulats et les articles de foi. Si encore il n'y avait que l'Analyse proprement dite ! Mais la géométrie. Le continu géométrique surtout. Que de tours pendables ce dernier nous a joués. On commence tout de même à s'apercevoir que la Géométrie, en général, n'est pas physique et la géométrie euclidienne moins que les autres. En Physique la discontinuité est partout, dans la matière comme dans les manifestations quantiques de l'énergie. Si l'on cherche à analyser tout cela avec des lignes, des surfaces, des variétés continues, quelles contradictions n'engendre-t-on pas ! Et puis les ensembles qui ont la puissance du continu n'arrivent que très loin derrière les ensembles dénombrables qui eux-mêmes fourmillent de contradictions. Est-ce la fin de la Science, l'aveu d'impuissance après tant et tant d'efforts ? Nullement. Il faut seulement renoncer à l'idée d'un monument logique impeccable *et* *unique* et comprendre que chacun peut toujours former ou admirer, suivant les tendances de son propre cerveau, les constructions philosophiques les plus esthétiques. La Science est alors Art. Et, au fond, il en a toujours été ainsi. Les Grecs n'ont point parlé de la vérité des sphères mais de leur harmonie. Il faut aussi rejeter, du moins sous la forme suivante, le principe du tiers exclu. Ceci est A ou B. Allons, décidez-vous pour l'une ou l'autre de ces alternatives; nous avons soif de certitude. A ou B, oui ou non. Surtout ne nous parlez pas de C ! Ce principe n'est d'ailleurs qu'une transformation à peine déguisée de l'aphorisme d'après lequel la vérité serait une, affirmation qui, lorsqu'il s'agit de la vérité philosophique, est totalement dépourvue de sens. Et qu'on ne dise pas que ceci est déprimant, démoralisant. Personnellement je n'ai jamais tant admiré la Science que depuis Einstein. Quel prodigieux artiste ! Ce qui est démoralisant au premier chef c'est de postuler l'existence d'une vérité unique car on ne trouvera jamais rien qui puisse correspondre à cette singulière conception. Au contraire la Beauté, même dans ses formes indéfiniment multipliées et renouvelées, gardera toujours un charme et une puissance de séduction incomparables.

Ces généralités pourraient suffire, je crois, à présenter un ouvrage qui m'est très sympathique. Je tiens cependant à ajouter que M. Gonseth a de délicieuses trouvailles qui me semblent relever du plus pur humour. Il écrit (p. 109): « Je suppose maintenant qu'il existe encore au monde — « la supposition est-elle tout à fait invraisemblable ? — un mathématicien « qui ne veuille rien entendre des géométries non-euclidiennes, ou bien, « ce qui est la même chose, un physicien qui refuse d'admettre la légitimité « des spéculations relativistes. » Votre supposition, mon cher Collègue, n'a rien d'invraisemblable et si vous vouliez jamais connaître quelques beaux types des oiseaux rares auxquels vous faites allusion, ne fouillez pas le monde entier; il vous suffirait de venir à Toulouse. Ah, je ne suis pas de ceux qui essayent d'escamoter les arguments et le nombre des adversaires. Comme j'aimerais, au contraire, voir tous ces derniers bien en vue, explicitement pavoisés des dits arguments !

A. Buhl (Toulouse).

M. Lecat. — **Coup d'œil sur la Théorie des Déterminants supérieurs dans son état actuel.** Préface de M. A. Buhl. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-200 pages. Prix: 16 Belgas. Maurice Lamertin, Bruxelles, 1927.

Cet ouvrage est un développement de celui analysé sous le même titre l'an dernier (p. 151), ouvrage qui n'avait que 60 pages. Celui-ci n'a encore qu'un caractère transitoire en attendant les trois gros volumes promis. M. Maurice Lecat m'a fait l'honneur de me demander une préface et j'ai mis dans celle-ci les appréciations qui m'ont semblé les meilleures et les plus justes; je suis dès lors assez embarrassé pour y ajouter quelque chose de bien remarquable. Néanmoins je renouvellerai l'expression de ma confiance. Les immenses progrès apportés en analyse et en physique mathématique par le calcul différentiel absolu sont actuellement du niveau d'une solide et étendue théorie des déterminants ordinaires cependant que les expressions à indices multiples y constituent la matière courante. Ne faut-il pas conclure de là que les matrices engendrées par de telles expressions seront un important sujet d'étude pour demain et que les déterminants supérieurs contenus dans ces matrices ne se révéleront pas moins utiles que leurs ancêtres à deux dimensions. Qu'un beau travail physique, utilisant le cas général, paraisse tout à coup et les adeptes seront nombreux; on s'étonnera peut-être alors d'avoir tant méconnu un algorithme mathématique existant en somme depuis longtemps, de même qu'on s'est étonné, après Einstein, d'avoir méconnu le calcul de Ricci et de Levi-Civita. Et ce qui semble militer en faveur de cette manière de voir, c'est que des physiciens et mathématiciens américains, notamment M. John D. Barter de l'Université de Californie, viennent précisément, sous l'influence de la nécessité, de reconstruire d'importants fragments appartenant à l'algorithme général des déterminants à n dimensions.

L'exposé préliminaire que M. Lecat nous livre aujourd'hui est particulièrement simple. Il débute par une topologie de la matrice solidement appuyée sur l'usage du symbole de Kronecker. Ce sont surtout des questions de symétrie dans les permutations d'indices qui font les *actinités*, les matrices *actinoïdes*, les *actinalités*, etc. Il y a là une terminologie luxuriante sur laquelle nous ne pouvons insister ici mais cette luxuriance provient toujours d'observations symétriques, donc esthétiques. C'est certainement par là que la théorie s'imposera. De plus celle-ci apparaît comme développée par étapes analogues à celles de la théorie ordinaire. On y retrouve le développement laplacien, le principe d'addition des tranches, les adjoints, les déterminants de déterminants... A la fin du volume l'auteur indique quelques sujets d'étude; pour beaucoup, tout, dans le livre, sera sujet d'études et de réflexions jusqu'au moment où, ces effets portant leurs fruits, on verra tout ce qu'il y a de naturel et de scientifiquement présent dans les déterminants supérieurs.

A. BUHL (Toulouse).

J. LEMAIRE. — **Etude élémentaire de l'Hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées.** — 1 vol. in-8° de 172 pages. Prix: 12 fr.. Vuibert, Paris, 1927.

Ceci est de la belle géométrie élémentaire. Si la géométrie euclidienne nous donne maintenant des doutes quant à sa réalité physique, elle ne cesse cependant pas d'avoir esthétiquement rang dans la Science. Des ouvrages récents, comme *Les lieux géométriques* de M. T. Lemoyne, les *Compléments* de M. Ch. Michel, *Le Problème de Pappus* de M. A. Maroger, quelques autres d'ailleurs non moins excellents et enfin celui-ci, exposent la plus accessible de toutes les géométries avec une élégance qui captivera toujours bien des esprits.

L'hyperbole équilatère (H) est définie ici comme le lieu du sommet d'un triangle ayant à la base des angles différant d'un droit. On voit l'analogie immédiate avec le cercle et ceci rappelle même le nom d'*hypercle* qui fut proposé autrefois pour (H). Il est curieux que cette courbe ait beaucoup de propriétés qu'on ne retrouve point de manière immédiate sur l'hyperbole quelconque. De plus, elle est en relation simple avec d'autres courbes plus savantes, comme l'hypocycloïde à trois rebroussements (H_3). L'enveloppe des asymptotes (ou des axes) des H circonscrites à un triangle est une (H_3). L'étude de points concycliques sur une (H) donne de nombreuses propriétés des quadrilatères et conduit à une (H_4). On peut, de même, associer à une (H) des coniques à axes parallèles aux asymptotes de cette (H).

L'inversion donne, à partir de (H), une strophoïde ayant naturellement aussi des points concycliques fort remarquables. Suivent aisément les propriétés autohomographiques de la strophoïde, puis les cubiques à point double et les courbes de la troisième classe parmi lesquelles on retrouve les (H_3). Enfin l'inversion transforme encore des (H) en lemniscates d'où des ouvertures à propos de faisceaux de coniques sur certains lieux du quatrième ordre. Des exercices (au nombre de 89) terminent l'ouvrage qui, on le voit, est de ceux qui, derrière un petit rien initial, font découvrir un joli et vaste monde. A. BUHL (Toulouse).

O. D. CHWOLSON. — **Traité de Physique** (Ouvrage traduit sur l'édition russe). Edition revue et considérablement augmentée par l'Auteur. Tome supplémentaire, La Physique de 1914 à 1926. Première Partie traduite du russe par A. CORVISY. — 1 vol. in-8° de 339 pages; fr. 63; J. Hermann, Paris.

Depuis 1914, date du dernier volume du Traité de M. Chwolson, la Physique s'est développée d'une manière étonnante: cela est un lieu commun. C'en est un encore, d'affirmer que ce développement n'a pas porté sur des chapitres anciennement traités de cette science, mais qu'au contraire, il s'est manifesté par l'élaboration de conceptions, sinon tout à fait nouvelles, du moins à peine ébauchées avant la guerre. On se rendra compte de ces progrès prodigieux, en parcourant la table du tome supplémentaire que M. Chwolson a écrit pour son célèbre *Traité de Physique*. Remarquons que seule la première partie de ce tome a paru, de sorte que l'énoncé rapide des chapitres que nous allons donner ne fournit qu'une image imparfaite de l'essor de la physique.

I. La charge et la masse de l'électron. II. Théorie des quanta (dans ce chapitre, on peut regretter que les travaux de Poincaré et de M. Jeans, fort importants pour la signification théorique de la notion de quantum ne soient pas cités). III et IV. La structure de l'atome (travaux de J. J. Thomson, de Bohr, de Sommerfeld, de Born, de Landé, de Kossel et de Rutherford). V. Etude des spectres de lignes (doublets, triplets, principes de correspondance). VI. Les rayons X (Moseley, Bragg, père et fils, de Broglie, Debye et Scherrer). VII. Les spectres de bandes. VIII. Rayons ultra-violets et infra-rouges. IX. Excitation et ionisation des gaz par les chocs des électrons (Franck et Hertz).

Chaque chapitre se termine par une liste bibliographique qui rendra de grands services aux lecteurs désireux de préciser les connaissances qu'ils ont acquises en lisant le texte forcément concis, quoique presque toujours très clair. G. JUVET (Neuchâtel).

J. W. GIBBS. — **Principes élémentaires de Mécanique statistique.** Traduction française de F. COSSERAT. Revue et complétée par J. ROSSIGNOL avec une introduction de M. BRILLOUIN. — 1 vol. in-8° de 194 pages; fr. 42; J. Hermann, Paris.

On sait l'importance de cet ouvrage dans l'histoire des théories statistiques de la physique. Ce qui en fait l'importance, c'est « le puissant effort de coordination qu'elle représente » comme le dit M. Brillouin dans l'introduction qu'il a écrite pour cette traduction française. En moins de 200 pages, Gibbs a exposé une théorie dont la puissance de synthèse est admirable et dont aucune partie ne paraît avoir vieilli, après un quart de siècle; ce fait est étonnant si l'on songe à la prodigieuse variabilité des théories physiques durant cette époque.

M. F. Cosserat avait traduit cet ouvrage presque complètement; on a retrouvé cette traduction dans les papiers du si regretté mathématicien; M. Rossignol l'a mise au point et l'on doit remercier M. Hermann, éditeur, qui a mis à la disposition du public français cette belle œuvre d'un des plus profonds théoriciens de notre temps.

G. JUVET (Neuchâtel).

Filippo BURGIO. — **Il secondo Problema Balistico, Rotazione dei proietti.** — 1 vol. in-8° de 91 pages, avec 8 planches; Tipografia Olivero & C°, Torino, 1927.

En une centaine de pages, M. F. Burgio a réussi à présenter les résultats généraux issus des études récentes sur le problème de la rotation des projectiles, problème fondamental que son compatriote, le colonel DE St-ROBERT, aborda le tout premier dans la seconde moitié du siècle dernier.

Le début de l'ouvrage est consacré aux équations différentielles du mouvement, aux hypothèses simplificatives, aux propriétés simples de la précession et de la nutation du mobile. Plus loin, l'auteur étudie spécialement la précession et la nutation; il fait ici une place très grande, dans son exposé, aux travaux du général MAYEWSKI, du comte DE SPARRE, et du commandant CHARBONNIER. La résolution du problème de la précession entraîne forcément l'étude de la dérivation du projectile, à laquelle un chapitre est réservé.

La seconde moitié de l'ouvrage est bien attrayante. L'auteur y expose les recherches expérimentales sur la rotation du projectile; et il s'agit ici des plus récentes recherches, auxquelles le nom de l'auteur est attaché. Il faut dire que M. F. Burgio est professeur à l'Académie militaire d'artillerie, à Gênes; il n'est donc pas étonnant que le problème soulevé par de St-Robert sollicite son attention.

Le lecteur trouvera aussi grand profit à lire le chapitre VII, où l'auteur fait une critique rapide des différentes méthodes employées par les balisticiens les plus célèbres pour aborder le problème de la rotation; on retrouve ici les noms de « DE St-ROBERT, MAYEWSKI, DE SPARRE, CHARBONNIER, auxquels il faut joindre ceux de CRANZ, de VAHLEN et d'ESCLANGON; l'auteur nous avise, d'ailleurs, que cette critique n'a nullement la prétention d'être complète. Les applications numériques qui terminent l'ouvrage sont variées; on y parle de mortiers et de canons de différents types; on y rencontre de nombreuses tables, ainsi que toute une série de diagrammes.

Il faut féliciter M. F. Burgio d'avoir pris la peine de réunir, dans cet élégant petit volume, et en les présentant sous une forme condensée, ses propres idées et les résultats de ses travaux sur un problème qui n'intéresse pas que les balisticiens, mais tous les amateurs de mécanique rationnelle.

G. TIERCY (Genève).

C. CRANZ. — **Lehrbuch der Ballistik.** Tome II : **Innere Ballistik** unter Mitwirkung von O. POPPENBERG u. O. v. EBERHARD. — 1 vol. in-8° de 454 p. avec 37 figures dans le texte et 38 fig. en appendice; M. 39; J. Springer, Berlin, 1926.

C'est là le deuxième volume de la nouvelle édition du grand ouvrage du Dr Cranz. Il est entièrement consacré au problème suivant: « trouver, en fonction du temps, la pression qui règne dans le canon, la vitesse du projectile dans le canon, la température des gaz, l'échauffement du tube ». Et chacune de ces questions entraîne avec elle des problèmes secondaires.

L'ensemble du problème de la balistique intérieure est extraordinairement compliqué; et sa solution dépend encore d'un grand nombre de données plus ou moins empiriques; aussi est-il fort malaisé de la présenter. Un des mérites les plus évidents du volume du Dr Cranz consiste en ce que le plan adopté met immédiatement de l'ordre dans les idées.

Le lecteur est averti, dès l'abord, que la base des développements du calcul est constituée par des éléments de thermochimie et de thermodynamique; les deux premiers chapitres du volume traitent en effet des lois de la thermodynamique des gaz et des constantes des explosifs; ils ont été spécialement rédigés par M. O. Poppenberg.

On trouve ensuite un exposé et une critique des principales méthodes expérimentales pour la détermination de la pression; puis une théorie de l'explosion et de la détonation, ou plutôt une comparaison des différentes recherches, y compris les plus modernes; on trouve dans ces chapitres une série de noms connus; ceux, par exemple, de Vallier, Sarrau, Nernst, Poppenberg, Berthelot, Wolff, Becker, Vieille, P. Charbonnier, Cranz, Schmitz, Mache, Heydenreich, etc.

La mécanique des explosions et les actions mécaniques des explosions sur le milieu environnant font l'objet d'un chapitre entier; c'est le vieux problème de Lagrange, hérissé de difficultés, tant analytiques qu'expérimentales, et à la solution duquel se sont attachés des balisticiens éminents, comme Vieille, Hugoniot, Charbonnier, Gossot-Lionville, Love-Pidduck, etc.

A part le dernier chapitre, qui est réservé à l'étude du recul de l'arme et du choc en arrière, presque toute la fin du volume est consacrée à la recherche des solutions approchées des équations du problème fondamental. Les méthodes sont légion, même en se bornant aux plus récentes, données entre 1900 et 1922; ces méthodes portent d'ailleurs, pour la plupart, des noms de balisticiens déjà cités souvent dans la première partie de l'ouvrage. Parmi tant de procédés, il convient de signaler spécialement celui de l'auteur du présent ouvrage; c'est une méthode graphique de résolution des équations.

Quant au mouvement de rotation du projectile dans le canon, il est traité dans un chapitre spécial, où l'on étudie la forme convenable de la rainure du canon.

Disons enfin que le volume est terminé par une collection de très remarquables photographies se rapportant à la mécanique des explosions, et obtenues au moyen de balles d'infanterie de 28^{mm} de long.

G. Tiercy (Genève).

G. Julia. — **Eléments de Géométrie infinitésimale.** — Un volume in-8° de 242 pages avec 15 figures. Prix: 45 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Ces Eléments de Géométrie infinitésimale correspondent aux leçons professées par M. Julia à la Faculté des Sciences de Paris, en vue du Certificat de Calcul différentiel et intégral. Ils peuvent servir de guide à tous ceux qui désirent s'initier à l'étude des traités de Géométrie supérieure dont le type est le traité de Darboux.

L'ouvrage comprend quatre parties: I. Théorie du contact. Enveloppes.

Etude particulière des familles de droites. II. Etude des courbes gauches ou planes. III. Etude des surfaces. Propriétés générales. Lignes tracées sur une surface. Application aux congruences de droites. IV. Représentation des surfaces les unes sur les autres.

Dans sa *Préface* l'auteur attire l'attention du lecteur sur les méthodes dont il a fait choix suivant la nature du problème. Nous ne saurions mieux faire que d'en donner un extrait:

« Je n'ai pas eu d'hésitation à me servir de la méthode vectorielle, d'abord à cause des grandes simplifications d'écriture et d'exposition qu'elle offre quand on veut établir des théorèmes *généraux*, ensuite parce que dans une première étude des courbes et des surfaces elle rend des services analogues à ceux que rend la méthode cinématique du trièdre mobile (à laquelle elle est d'ailleurs intimement liée).

« Mais, dans l'étude des problèmes *particuliers*, le choix judicieux de tel trièdre de coordonnées cartésiennes, ou de tel autre système de référence *canonique* qui convient spécialement à la nature géométrique du problème étudié, entraîne souvent des simplifications d'analyse au moins aussi grandes: c'est pourquoi j'ai conservé la méthode analytique en usant très souvent des coordonnées cartésiennes.

« L'emploi combiné des deux méthodes m'a paru devoir familiariser les étudiants avec l'interprétation géométrique des équations entre coordonnées en les habituant à suivre, au moyen de l'instrument analytique, les progrès du problème *géométrique* étudié. C'est pourquoi j'ai traité certaines questions par les deux méthodes à la fois, sans exclure, bien entendu, les remarques de géométrie pure destinées à mener rapidement au but.

« C'est surtout de cette manière que le présent livre se distingue des excellents traités précédemment cités. J'ai développé aussi plus qu'on ne le fait d'habitude la théorie des congruences de droites en donnant quelques notions sur les *droites singulières* qu'on trouvera à la fin du troisième chapitre: il y a là une application intéressante des intégrales singulières d'équations différentielles, et quelques problèmes sur les représentations analytiques qui m'ont paru de bons exercices d'application du cours. »

R. Courant. — **Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung.** Erster Band: Funktionen einer Veränderlichen. — Un volume in-8° de XIV-410 pages. Prix: Rm. 18,60. Julius Springer, Berlin.

Ces leçons de Calcul différentiel et intégral s'adressent plus particulièrement aux étudiants de première année de l'enseignement supérieur, universitaire et technique. Elles seront lues aussi avec profit par tous ceux qui désirent s'initier aux principes fondamentaux de l'analyse.

Ce premier volume est consacré aux fonctions d'une variable, tandis que le second traitera principalement des fonctions à plusieurs variables. Par l'ordonnance et le choix des matières, il diffère sensiblement des traités classiques. Ainsi les notions de dérivée et d'intégrale ne sont pas exposées dans des chapitres distincts, mais elles sont étudiées dans leurs liens étroits.

Dans cette introduction à l'analyse, le savant professeur de Goettingue sait se limiter aux principes essentiels en évitant les développements inutiles dans une première étude. Il les présente avec rigueur, mais sans pédanterie, en laissant, suivant l'exemple de son illustre maître Félix Klein, une juste place à l'intuition et aux applications empruntées à la géométrie, à la mécanique et à la physique. H. F.

O. Perron. — **Algebra.** I. Band: **Die Grundlagen.** Un volume in-8° de VIII-307 pages avec 4 figures, broché 10M., relié 11 M. 50. — II. Band: **Theorie der algebraischen Gleichungen.** Un volume in-8° de VIII-243 pages avec 5 figures, broché 8 M., relié 9 M. 50. — (Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine Mathematik, Bd. 8 et 9.) Walter de Gruyter et Co, Berlin et Leipzig.

Ce nouveau traité d'Algèbre supérieure, rédigé par M. Perron, Professeur à l'Université de Munich, comprend l'étude des chapitres classiques qui conduisent à la théorie des équations algébriques.

Le premier volume contient l'exposé des principes fondamentaux. L'auteur introduit dès le début la notion de domaine algébrique qui joue un rôle si considérable dans les développements modernes de l'Algèbre.

La théorie des équations algébriques fait l'objet du second volume. Le premier chapitre est consacré à la résolution des équations numériques. Puis viennent, dans les chapitres suivants la résolution algébrique et la théorie de Galois. Un dernier chapitre traite de la résolution de l'équation du cinquième degré à l'aide des fonctions elliptiques.

Ecrit avec beaucoup de méthode et de clarté, cet ouvrage sera apprécié par tous les mathématiciens. Il ne tardera pas à prendre place dans les bibliothèques à côté des traités classiques d'Algèbre. H. F.

L. E. Dickson. — **Algebren und ihre Zahlentheorie.** Mit einem Kapitel über Idealtheorie von A. Speiser. (Veröffentlichungen der schweiz. mathematischen Gesellschaft, Bd. 4.) — Un volume in-8° de 310 pages. Prix: broché 18 francs (14 M. 40), relié 22 francs (17 M. 60). Orell-Füssli Verlag, Zurich et Leipzig.

Les théories développées par M. Dickson dans son ouvrage intitulé *Algebras and their Arithmetics* forment une généralisation de la théorie classique des nombres algébriques. Le mécanisme s'élargit lorsqu'on aborde la théorie des systèmes de nombres complexes d'ordre supérieur dans un corps quelconque, c'est-à-dire, selon la dénomination adoptée par les auteurs américains, les algèbres et leurs arithmétiques.

On ne se borne plus aux nombres complexes à coefficients réels ou complexes, le domaine s'étend et la généralisation devient complète.

Ce sont ces théories nouvelles, encore peu connues et qui offrent un beau domaine de recherches aux mathématiciens, qui sont exposées dans ce livre publié sous les auspices de la Société mathématique suisse.

Le texte publié en 1923 par l'University of Chicago Press a été entièrement remanié et complété par l'auteur. La traduction allemande est due à MM. J. J. Burckhardt et E. Schubarth; elle a été revue avec soin par M. Dickson.

L'ouvrage se termine par un chapitre dans lequel M. A. Speiser (Zurich) développe sa théorie des idéaux d'une algèbre rationnelle. H. F.

Sophus Lie. — **Gesammelte Abhandlungen,** herausgegeben von dem Norwegischen mathematischen Verein durch Fr. Engel (Giessen) und P. Heegaard (Oslo). Sechster Band: *Abhandlungen über die Theorie der Transformationsgruppen.* II. Anmerkungen zum sechsten Band. — Herausgegeben von Fr. Engel. — Deux volumes gr. in-8° de 752 et 185 pages. H. Aschehoug et Cie, Oslo: B. G. Teubner, Leipzig. 1927.

En réunissant dans les tomes V et VI des œuvres complètes de Sophus

Lie les mémoires que le grand géomètre norvégien a consacrés à l'étude des groupes de transformations continues, M. Engel rend un grand service aux chercheurs. Comme il l'a fait remarquer dans sa préface au tome V, les jeunes mathématiciens trouveront dans ces mémoires de nombreux sujets qui peuvent être le point de départ de beaux travaux.

Le tome VI comprend trente mémoires se rapportant principalement aux groupes de transformations, aux invariants différentiels, et aux transformations de contact. Il contient aussi la belle conférence faite par Lie à Paris en 1895, à l'occasion du Centenaire de l'Ecole normale supérieure, sur l'influence de Galois sur le développement des mathématiques.

Il faut savoir gré à M. Engel du grand soin qu'il a apporté aux annotations. Elles font l'objet d'un volume annexe dans lequel on trouvera d'intéressants rapprochements avec des travaux d'autres géomètres, ainsi que des extraits de la correspondance de Lie. H. F.

E. Pascal. — **Repertorium der höheren Mathematik.** Zweite, völlig umgearbeitete Auflage der deutschen Ausgabe, unter Mitwirkung zahlreicher Mathematiker, herausgegeben von E. Salkowski und H. E. Timerding. — Erster Band: *Repertorium der höheren Analysis*, herausgegeben von E. Salkowski. Zweiter Teilband. — Un volume in-8° de xii-494 pages. Prix: relié, 18 Rm. B. G. Teubner, Leipzig. 1927.

Le « Repertorium » du Professeur E. Pascal, de l'Université de Naples, constitue une petite encyclopédie des mathématiques supérieures destinée à donner un aperçu systématique des mathématiques, avec l'indication des ouvrages et mémoires fondamentaux. Entièrement remanié dans son édition allemande, l'ouvrage comprend une série de monographies rédigées par des spécialistes. Il est divisé en deux parties : I. Analyse, II. Géométrie.

Dans sa nouvelle édition, le tome consacré à l'Analyse se composera de trois volumes, dont le premier a paru en 1910. Interrompue par la guerre, la publication vient d'être reprise et sera terminée à bref délai.

Le deuxième volume du tome I contient les chapitres suivants: Equations différentielles ordinaires et équations aux différences, par A. Guldberg (Oslo). — Equations aux dérivées partielles, par A. Guldberg. — Intégrabilité totale. Problème de Pfaff. Formes différentielles, par E. Pascal (Naples). — Groupes de transformations, par A. Guldberg et F. Engel (Giessen). — Calcul des variations, par H. Hahn (Vienne). — Théorie des fonctions, par G. Doetsch (Stuttgart). — Intégrales et fonctions elliptiques, par E. Jahnke (†) et A. Barneck (Berlin). — Intégrales et fonctions algébriques, par W. E. Jung (Halle). — Fonctions Théta et fonctions abéliennes, par W. E. Jung. — Fonctions automorphes, par R. Fricke (Braunschweig).

Le troisième volume sera consacré aux fonctions analytiques et aux théories modernes de l'Analyse. H. F.

H. P. Hudson. — **Cremona Transformations in Plane and Space.** — Un volume gr. in-8° de 454 pages. Prix: relié, 42 sh. Cambridge University Press, 1927.

Ce beau volume est entièrement consacré aux transformations de Cremona dans le plan et dans l'espace et à leurs applications dans les divers domaines de la géométrie.

On sait le rôle important que ces transformations jouent en Géométrie supérieure et l'impulsion que leur étude a donnée au développement de la géométrie algébrique. Il suffit de rappeler les remarquables applications à l'étude des singularités des courbes et des surfaces algébriques et à la théorie du contact.

Grâce à ses nombreuses contributions dans ce domaine, Mlle H. P. Hudson était tout particulièrement désignée pour présenter aux lecteurs de langue anglaise une étude d'ensemble sur les transformations de Cremona. Son exposé rendra de grands services aux géomètres.

A la fin du chapitre consacré à l'aperçu historique, l'auteur signale aux chercheurs un certain nombre de questions non encore résolues qui pourraient faire l'objet de thèses.

L'ouvrage se termine par une bibliographie très complète, classée par noms d'auteurs et s'étendant sur plus de quatre cents mémoires.

H. F.

RIEMANN-WEBER. — **Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik.** Zweiter, physikalischer Teil, herausgegeben von Philipp FRANK. — Un volume in-8° de XXIII-864 pages. Prix: broché, 53 Rm., relié, 58 Rm. Verlag Fr. Vieweg und Sohn, Braunschweig. 1927.

A l'occasion de la publication du premier volume, nous avons signalé le but que se sont proposés les auteurs en présentant aux mathématiciens et aux physiciens un nouveau traité sur les équations différentielles et intégrales de la mécanique et de la physique sur la couverture duquel il tiennent cependant à conserver les noms de Riemann-Weber. En cherchant à mettre ce nouvel exposé en harmonie avec les progrès réalisés au cours des vingt dernières années, ils font pour notre époque ce que Weber a fait pour la sienne. Leur ouvrage offre un tableau du développement récent des sciences mathématiques et physiques dans leur pénétration réciproque.

Tandis que le premier volume, dirigé par M. Richard v. MISES (Berlin), est consacré principalement à la partie mathématique, le second, publié sous la direction de M. Philipp FRANK (Prague), traite plus particulièrement des grands problèmes qui relèvent de la mécanique analytique et de la physique. Il est divisé en cinq parties.

Dans la première partie M. Frank étudie, en une série de chapitres, les équations différentielles qui se présentent dans les problèmes classiques de la mécanique analytique. La seconde comprend les problèmes de la conductibilité de la chaleur et de la diffusion, examinés par M. R. FUERTH (Prague). Puis viennent, dans la troisième partie, les questions relatives au champ électromagnétique stationnaire, par M. Fr. NOETHER (Breslau), et, dans la quatrième, celles qui se rattachent aux oscillations électromagnétiques, par M. A. SOMMERFELD. Enfin, dans la dernière partie, ont été groupés les chapitres concernant les théories de l'élasticité et la mécanique des fluides, exposés par MM. TREFFTZ (Dresde), Th. v. KÁRMÁN (Aix-la-Chapelle), H. FAXÉN et C. W. OSEEN (Upsall).

Sous cette nouvelle forme le traité de Riemann-Weber ne manquera pas d'être très apprécié par les jeunes générations de mathématiciens et de physiciens.

H. F.