8. — Autres propriétés (fig. 12).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

THÉORÈME. — *Sur chaque côté d'un triangle, la distance des points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit est égale à la différence des deux autres côtés.*

Relation entre ces trois distances.

$$YE + ZF = c_1 - b_1 \ .$$

Donc

$$\underline{XD = YE + ZF \ ,} \tag{60}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La distance des points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit sur le côté moyen d'un triangle est égale à la somme de leurs distances sur les deux autres côtés.*

8. — Autres propriétés (fig. 12).

1° Les hauteurs d'un triangle étant les bissectrices des angles du triangle des pieds des hauteurs, leur point d'intersection H est le centre du cercle inscrit dans ce dernier triangle. En outre, les angles B_1 et C_1 du quadrilatère $AB_1 HC_1$ par exemple étant droits, ce quadrilatère est inscriptible. Donc:

Les cercles circonscrits aux triangles aux sommets passent par l'orthocentre H *du triangle donné, c'est-à-dire par le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs*[1].

2° *Les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont les points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné.*

Car les segments supérieurs des hauteurs sont les diamètres de ces cercles.

3° Les pieds des hauteurs d'un triangle, les points milieu des côtés et les points milieu des segments supérieurs des hauteurs sont situés, comme on sait, sur un même cercle appelé « *cercle des neuf points* ». Ce dernier n'est donc autre que le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs. Par suite:

Le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs passe par les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets.

---

[1] Si le triangle donné est obtusangle (par exemple ACH, fig. 11), l'orthocentre (B) est alors le centre d'un des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs ($A_1B_1C_1$) correspondant.

4° *Les côtés du triangle des centres* (O′ O″ O‴) *des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont parallèles aux côtés du triangle donné et divisent les segments inférieurs des hauteurs en deux parties égales.*

En effet, la ligne des centres O′ O″ est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune HC_1 ou *i‴*.

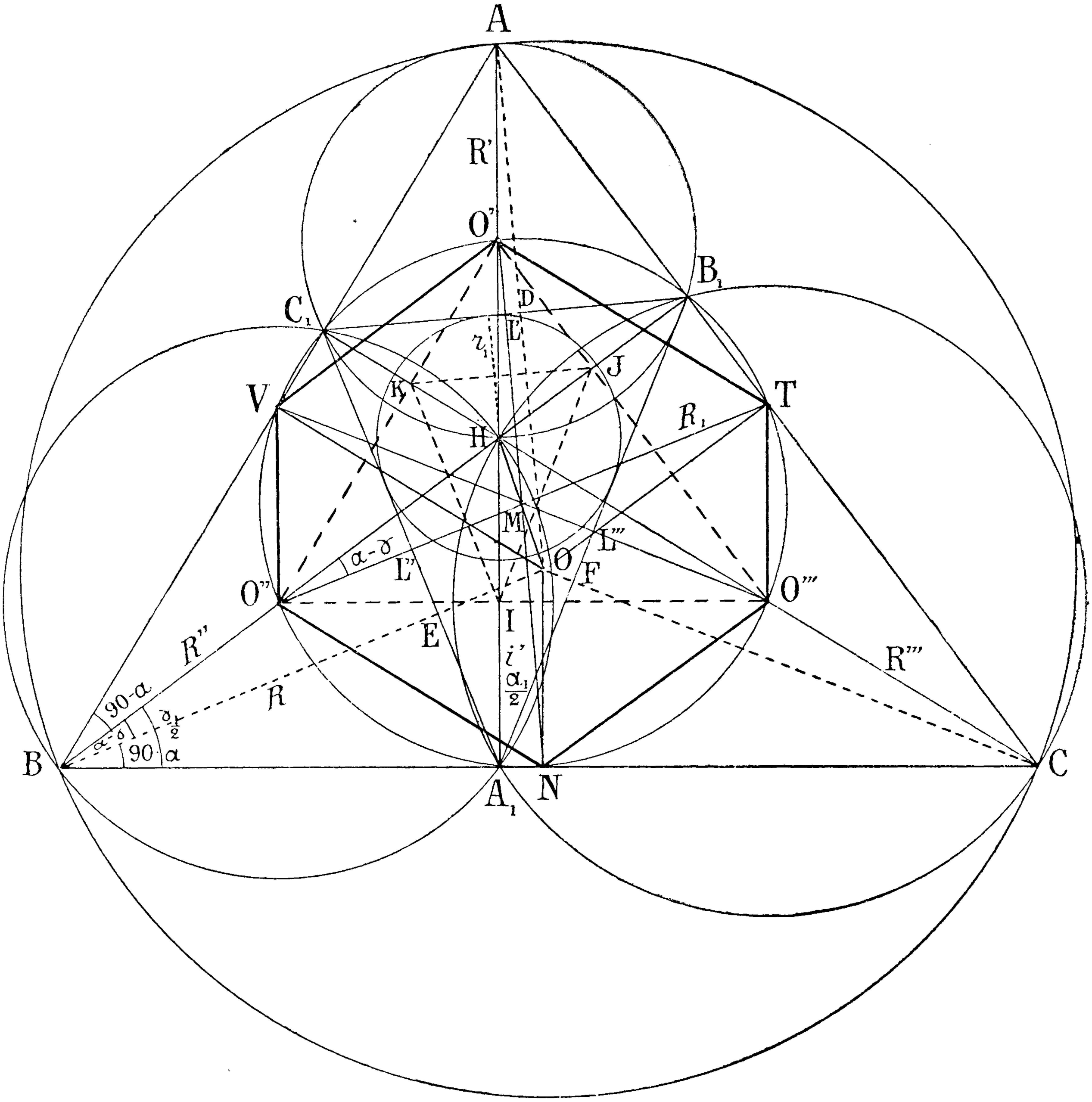

Fig. 12.

5° *Le centre radical des cercles circonscrits aux triangles aux sommets est l'orthocentre* H *du triangle donné, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

Car H est le point d'intersection des cordes communes A_1 H, B_1 H et C_1 H, axes radicaux des trois cercles.

6° *Les sommets du triangle donné sont les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs.*

Soit en effet $A_1 S$ le prolongement de $C_1 A_1$ et $B_1 T$ celui de $C_1 B_1$. $A_1 C$ est la bissectrice de l'angle extérieur $B_1 A_1 S$ et $B_1 C$ celle de l'angle extérieur $A_1 B_1 T$; leur point d'intersection C, sommet du triangle donné, est donc le centre du cercle ex-inscrit au triangle $A_1 B_1 C_1$.

De 3° et 6° résulte, le point d'intersection H des hauteurs étant le centre du cercle inscrit[1] dans le triangle des pieds des hauteurs:

Théorème. — *Le cercle circonscrit à un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *divise en deux parties égales les distances entre le centre* (H) *du cercle inscrit et les centres* (A, B, C) *des cercles ex-inscrits.*

7° *Le centre* M *du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs est le point milieu de la distance de l'orthocentre* H *du triangle donné au centre* O *du cercle circonscrit à ce triangle.*

En effet, le rectangle $VO'' O''' T$ étant inscrit dans le « cercle des 9 points », ses diagonales VO''' et $O'' T$ sont des diamètres de ce cercle et leur point d'intersection en est le centre M. Les triangles MOT et MHO'' sont égaux ($MT = MO''$, $OT = \frac{i''}{2} = HO''$ et $\sphericalangle T = \sphericalangle O''$). Par suite $MO = MH$ et les angles en M sont égaux: MH est donc le prolongement de OM.

8° *La ligne des centres* (MO'') *des cercles circonscrits au triangle des pieds des hauteurs et à l'un quelconque des triangles aux sommets* ($BA_1 C_1$) *est perpendiculaire sur le milieu du côté commun* (*aux deux triangles*).

Car le côté commun $C_1 A_1$ aux deux triangles est la corde commune aux deux cercles.

MT étant le prolongement de $O'' M$, la propriété précédente donne lieu à la suivante:

9° *La droite qui joint le point milieu* O'' *du segment supérieur d'une hauteur du triangle donné au point milieu* T *du côté opposé est perpendiculaire sur le milieu du côté correspondant* $C_1 A_1$ *du triangle des pieds des hauteurs. Cette droite de jonction* $O'' T$ *est un diamètre du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs.*

10° *Les points milieu des segments inférieurs des hauteurs*

[1] ou d'un des cercles ex-inscrits.

d'un triangle sont sur la circonférence dont le rayon est le quart du rayon du cercle circonscrit au triangle donné et dont le centre est le point milieu de la distance de l'orthocentre H *du triangle donné au centre* M *du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs.*

En effet, les points milieu I, J, K des segments inférieurs des hauteurs du triangle donné ABC sont les pieds des hauteurs du triangle $O' O'' O'''$; d'après la 7^{me} propriété, le cercle circonscrit au triangle IJK des pieds des hauteurs a donc pour rayon la moitié du rayon R_1 du cercle circonscrit au triangle $O' O'' O'''$ qui vaut lui-même la moitié du rayon R du cercle circonscrit au triangle donné ABC. D'autre part, H étant aussi l'orthocentre du triangle $O' O'' O'''$ et M le centre du cercle circonscrit à ce triangle, le centre du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs correspondant IJK est au milieu de HM (C.Q.F.D.).

Les segments inférieurs des hauteurs du triangle donné ABC étant les segments supérieurs des bissectrices du triangle des pieds des hauteurs $A_1 B_1 C_1$, la 10^{me} propriété donne lieu à la suivante:

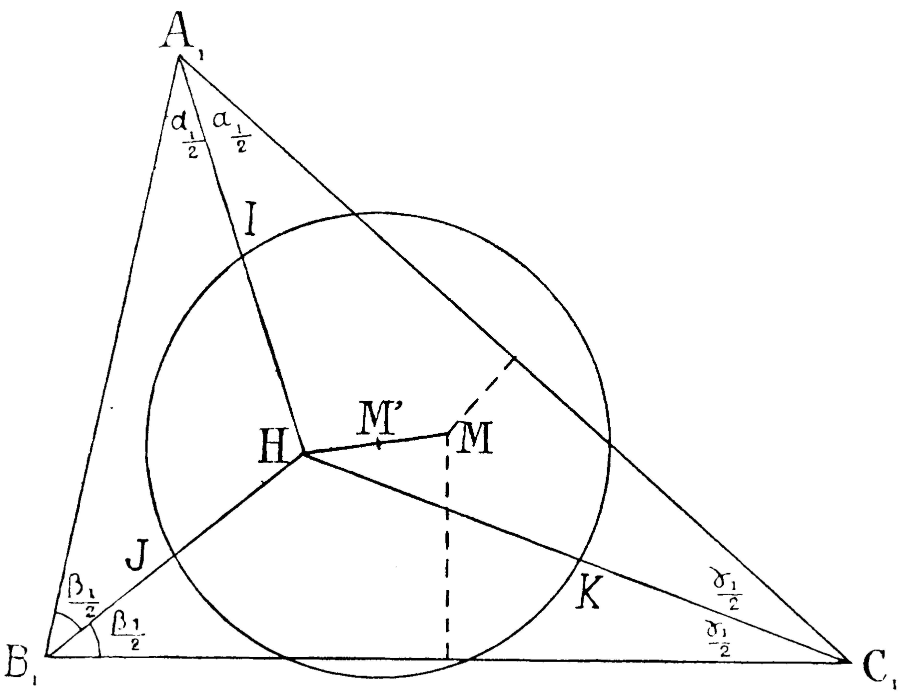

Fig. 13.

11° *Les points milieu des segments supérieurs des bissectrices des angles d'un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *sont sur la circonférence dont le rayon est la moitié du rayon* (R_1) *du cercle circonscrit et dont le* *centre M′ est le point milieu de la distance des centres* H *et* M *des cercles inscrit et circonscrit* (fig. 12 et 13).

Le triangle des pieds des hauteurs $A_1 B_1 C_1$ étant un triangle *quelconque*, la 11me propriété est aussi applicable au triangle donné ABC.

9. — Produits égaux (fig. 14).

Théorème 1. — *Si des sommets du triangle des pieds des hauteurs on abaisse les perpendiculaires sur les côtés du triangle donné, les produits de trois perpendiculaires de même sens sont égaux* (fig. 14).

Démonstration.

$$A_1G = c_1 \sin\beta\ , \qquad A_1K = b_1 \sin\gamma\ ,$$
$$B_1I = a_1 \sin\gamma\ , \qquad C_1M = a_1 \sin\beta\ ,$$
$$C_1J = b_1 \sin\alpha\ , \qquad B_1L = c_1 \sin\alpha\ .$$

Par suite

$$\underline{A_1G \,.\, B_1I \,.\, C_1J = A_1K \,.\, C_1M \,.\, B_1L\ .} \tag{61}$$

Théorème 2. — *Le produit des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des distances de même sens des sommets du triangle des pieds des hauteurs aux côtés du triangle donné* (fig. 14):

$$\underline{AD \,.\, BE \,.\, CF = A_1G \,.\, B_1I \,.\, C_1J \left(= \frac{S_1^2}{r_1}\right)\ .} \tag{62}$$

Démonstration.

$$AD = c' \sin\gamma\ , \qquad A_1G = a'' \sin\gamma\ ,$$
$$BE = a' \sin\alpha\ , \qquad B_1I = b'' \sin\alpha\ ,$$
$$CF = b' \sin\beta\ , \qquad C_1J = c'' \sin\beta\ ,$$

d'où résulte

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = a'b'c' (\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)$$

et

$$A_1G \,.\, B_1I \,.\, C_1J = a''b''c'' (\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)\ .$$