

# PROPRIÉTÉS ARITHMOFOCALES DE LA CUBIQUE DE WEIERSTRASS

Autor(en): **Turrière, É.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20684>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# PROPRIÉTÉS ARITHMOFOCALES DE LA CUBIQUE DE WEIERSTRASS

PAR

É. TURRIÈRE (Montpellier).

---

1. — Soit une courbe quelconque (C), plane ou gauche; les coordonnées  $(x, y, z)$  d'un point M de cette courbe sont des fonctions d'un paramètre  $u$ . Soit I un des points de contact des tangentes isotropes de la courbe (coordonnées de I:  $x_0, y_0, z_0$ , paramètre  $u_0$ ).

Sur la tangente isotrope considérée est pris un point F de coordonnées  $x_1, y_1, z_1$ :

$$x_1 = x_0 + \lambda x'_0, \quad \text{etc.}$$

La distance MF du point courant M de la courbe à ce point F est une fonction de  $u$  définie par l'équation:

$$\overline{MF}^2 = S(x - x_0)^2 + 2\lambda Sx'_0(x - x_0) ;$$

elle satisfait aux conditions:

$$\overline{MF}^2 = 0, \quad \frac{d}{du}(\overline{MF}^2) = 0,$$

pour  $u = u_0$ . L'équation  $\overline{MF}^2 = 0$  admet  $u = u_0$  comme racine double.

Si d'autre part MP désigne la distance du même point courant M à un plan ou une droite issue du point I, l'équation  $MP = 0$  admet  $u = u_0$  comme racine simple.

Le rapport  $\left(\frac{MF}{MP}\right)^2$  est donc, en général, une fonction de la variable  $u$  qui n'admet plus  $u_0$  ni comme zéro, ni comme infini.

En particulier, en géométrie plane, un couple de point  $F$  et de droite  $D$  issue de  $I$  est tout indiqué: le point réel  $F$  de la tangente isotrope et la droite réelle  $D$  passant par le point imaginaire  $I$ . Ce couple  $(F, D)$  généralise la notion de foyer plückérien, pour une courbe quelconque réelle ou imaginaire, algébrique ou transcendante.

2. — Lorsque la courbe  $(C)$ , plane, est définie au moyen du paramètre  $u = \int \frac{dx}{y}$ , par des formules  $x = f(u)$ ,  $y = f'(u)$ , au moyen d'une fonction  $f(u)$  et de sa dérivée, le point  $I$  est donné par l'équation:

$$f_0'^2 + f_0''^2 = 0 ;$$

la tangente en ce point rencontre l'axe  $Ox$  au point d'abscisse:

$$X = f_0 + f_0'' .$$

Si donc ce point sur  $Ox$  est pris pour point  $F$ , avec la droite associée  $D$  perpendiculaire menée de  $I$  sur  $Ox(x = f_0)$ , la fonction considérée prend la forme suivante:

$$\left(\frac{MF}{MP}\right)^2 = 1 + \frac{f'^2 - f_0'^2 - 2f_0''(f - f_0)}{(f - f_0)^2} ;$$

sa limite, lorsque  $M$  tend vers  $I$ , est  $1 + \left(\frac{f'''}{f'}\right)_0$ .

Que l'on particularise alors la fonction  $f(u)$  en la prenant égale à

$$f(u) = \cos mu , \quad \text{ch } mu , \quad au^2 + 2bu + c , \quad \text{etc.},$$

et l'on retrouve par cette voie les propriétés focales des coniques et autres courbes simples.

3. — Supposons maintenant que la fonction  $f(u)$  soit la fonction elliptique de WEIERSTRASS. Les arguments  $u_0$  des points de contact de tangentes isotropes sont déterminés par une équation du quatrième degré seulement (il s'agit en effet de mener des tangentes à la cubique de genre un par un point

du plan, situé sur une tangente inflexionnelle: position qui abaisse de deux unités le degré de l'équation). Cette équation est:

$$\left(6p_u^2 - \frac{1}{2}g_2\right)^2 + 4p_u^3 - g_2p_u - g_3 = 0.$$

Par exemple, l'hypothèse  $g_2 = -4$ ,  $g_3 = 16$ , donne les solutions  $pu = \pm i$ , et les racines

$$p_u = \frac{-1 \pm \sqrt{109}}{18}, \quad p'u = \pm \frac{2}{3} \sqrt{109} i, \quad p''u = ip'u,$$

de l'équation  $9p_u^2 + p_u - 3 = 0$ . Aux racines réelles correspondent deux droites D réelles perpendiculaires à l'axe de symétrie et deux foyers F réels, situés sur cet axe, et d'abscisses dépendant de l'irrationnelle  $\sqrt{109}$ . A la racine  $pu_0 = i$ ,  $p'u_0 = 4i$ ,  $p''u_0 = ip'u_0$ , correspondent le point F réel de coordonnées ( $x = -4$ ,  $y = 1$ ) et la droite D d'équation  $y = 4x$ ; cette droite est déterminée par l'origine O et l'arithmopoint ( $x = 4$ ,  $y = 16$ ) de la cubique de WEIERSTRASS. En combinant les signes dans  $pu_0 = \pm i$  et  $p'u_0 = \pm 4i$ , on trouve cette solution (F, D) et sa symétrique par rapport à Ox. Pour le rapport

$$\left(\frac{MF}{MP}\right)^2 = 17 \frac{(p+4)^2 + (p'-1)^2}{(4p-p')^2},$$

il est nécessaire de multiplier les deux termes par  $(4p+p')^2$ . Après la suppression du facteur commun  $(p^2u+1)^2$ , ce rapport devient:

$$\left(\frac{MF}{MP}\right)^2 = \frac{17}{4} \cdot \frac{4p^2u + 17pu - 4 + 8p'u}{(pu-4)^2}.$$

A un facteur constant près, cette expression est de la forme  $p(u+\alpha)$ , où  $\alpha$  est un argument constant.

Au point (4, -16), symétrique, par rapport à l'axe, du point d'intersection de la cubique de WEIERSTRASS avec la droite D, cette fonction se présente, il est vrai, sous forme indéterminée. Mais il est facile de trouver la vraie valeur soit analytiquement, soit géométriquement.

4. — Reprenons l'étude de l'équation du quatrième degré. La parabole polaire d'un point à l'infini dans la direction de coeffi-

cient angulaire  $m$ , parabole d'équation  $2my = 12x^2 - g_2$ , coupe la courbe du troisième degré en quatre points autres que le point d'inflexion à l'infini. Soient  $u_1, u_2, u_3, u_4$  les arguments de ces quatre points. Tout d'abord leur somme est nulle: à une période près:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 .$$

Avec de tels arguments la formule d'addition donne, si  $u_1 \neq u_2$ ,

$$p(u_1 + u_2) = (p u_1 + p u_2) \left[ \frac{9}{m^2} (p u_1 + p u_2) - 1 \right] ,$$

et dans le cas de duplication d'argument:

$$p^{2u_1} = \frac{m^2}{4} - 2p u_1 ,$$

$$p'^{2u_1} = -\frac{1}{m} \left( 6p^2 u_1 - 3m^2 p u_1 + \frac{m^4}{4} - \frac{1}{2} g_2 \right) .$$

En écrivant  $p(u_1 + u_2) = p(u_3 + u_4)$ , par exemple, on obtient:

$$p u_1 + p u_2 + p u_3 + p u_4 = \frac{m^2}{9} ,$$

condition satisfaite identiquement par les racines de l'équation du quatrième degré: remarque qui permet de vérifier l'égalité  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ .

Dans le cas étudié dans ce travail,  $m = i$ , les formules deviennent:

$$p(u_1 + u_2) = -(p u_1 + p u_2) [9(p u_1 + p u_2) + 1] , \quad (u_1 \neq u_2)$$

$$p^{2u_1} = -\left( 2p u_1 + \frac{1}{4} \right) ,$$

$$p'^{2u_1} = i \left( 6p^2 u_1 + 3p u_1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} g_2 \right) .$$

Les arguments  $-u_1, -u_2, -u_3, -u_4$  définissent alors les quatre points de contact des tangentes de coefficient angulaire  $-i$ , solutions de l'équation  $p''u + ip'u = 0$ .

Cela étant, si  $u_1$  est une solution correspondant à une racine réelle  $p u_1$  de l'équation du quatrième degré, celle-ci aura nécessairement une autre racine réelle  $p u_2$ ; soit  $u_2$  l'argument correspondant. Les tangentes aux points  $u_1$  et  $-u_1$  passent respec-

tivement par chacun des ombilics du plan; elles se coupent en un point *réel*  $F_1$  de l'axe de symétrie. La droite  $D_1$  qui joint ces points  $u_1$  et  $-u_1$  est réelle, perpendiculaire à l'axe. Dans ce cas, il existe donc deux couples  $(F_1 D_1)$ ,  $(F_2 D_2)$  de foyers réels et directrices réelles. Si les racines  $pu_3$  et  $pu_4$  sont réelles, la courbe aura donc quatre foyers réels sur l'axe, associés à quatre directrices réelles et perpendiculaires à l'axe et douze autres couples imaginaires.

Pour un des ces couples réels correspondant à un argument  $u_0$ , la formule générale donnant l'abscisse du foyer  $F$  devient  $X = pu_0 + p''u_0$ . La distance  $MF$  se présente sous la forme

$$\overline{MF}^2 = (pu - pu_0)^2 [4pu + 8pu_0 + 1] ,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{MF}{MP}\right)^2 = 4(pu - p^2u_0) ;$$

ce rapport s'annule pour  $u = -2u_0$ , point d'intersection de la tangente isotrope en  $u_0$  avec la cubique, pour une raison évidente géométriquement. Cette formule s'écrit encore

$$\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2(4MP + 12pu_0 + 1) ,$$

en mettant en évidence le cas  $pu_0 = -\frac{1}{12}$ , pour lequel elle se réduit à

$$\frac{\overline{MF}^2}{(\overline{MP})^3} = 4 .$$

L'équation du quatrième degré admet alors une racine double.

5. — Il a été noté précédemment que le rapport  $\left(\frac{MF}{MP}\right)^2$  était une fonction de  $u$  n'admettant plus, en général,  $u = u_0$  ni comme pôle ni comme zéro. Cela est vrai tant que l'équation  $f'_0 + f''_0 = 0$  n'est pas satisfaite par  $u = u_0$ , devenue racine triple de  $\overline{MF}^2 = 0$ . Dans le cas des fonctions elliptiques, cette équation,

$$p'u + p'''u = 0 ,$$

est vérifiée par  $pu = -\frac{1}{12}$ . Si donc  $u_0$  est un argument donnant

cette valeur à la fonction  $pu$ , avec  $p''u_0 = \pm ip'u_0$ , le rapport devient simplement:

$$\frac{(MF)^2}{(MP)^3} = 4 .$$

Pour que cette circonstance se produise, il faut que, l'invariant  $g_2$  restant quelconque, l'invariant  $g_3$  prenne la valeur:

$$g_3 = \frac{1}{4} \left( g_2 + \frac{1}{12} \right)^2 - \frac{1}{27 \cdot 16} .$$

Alors:

$$p'u_0 = -\frac{1}{12}, \quad p''u_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} - g_2 \right),$$

$$p'u_0 + p''u_0 = -\frac{1}{2} \left( g_2 + \frac{1}{12} \right).$$

L'équation du quatrième degré, en outre de cette racine double, admet deux autres racines dépendant de l'équation du second degré:

$$p^2u - \frac{1}{18}pu + \frac{1 - 72g_2}{27 \times 16} = 0 .$$

Si donc  $t$  désigne un nombre rationnel quelconque, les expressions suivantes des invariants

$$g_2 = 6t^2 + \frac{1}{108} = 6T + \frac{1}{12},$$

$$g_3 = 9t^4 + \frac{5}{18}t^2 - \frac{1}{8 \cdot 3^6} = 9T^2 + \frac{1}{2}T + \frac{1}{8 \cdot 27},$$

$$\Delta = -27T^3(81T + 1) = 3^{11} \cdot t^2 \cdot T^3,$$

où  $T$  désigne pour abrégier les calculs l'expression  $T = t^2 - \frac{1}{81}$ , assurent l'existence de racines simples et rationnelles. Il suffit de prendre:

$$p'u_3 = t + \frac{1}{36}, \quad p''u_3 = \frac{t}{3}(1 + 9t),$$

$$X_3 = 3t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{1}{36}, \quad 1 + 12p'u_3 = \frac{4}{3}(1 + 9t),$$

et

$$p'u_4 = -t + \frac{1}{36}, \quad \text{etc.} \dots$$

pour avoir les solutions  $u_1 = u_2 = u_0$ ,  $u_3$  et  $u_4$ , avec des arithmofoyers et arithmodirectrices.

La racine  $p u_0 = -\frac{1}{12}$  peut d'ailleurs devenir triple, avec  $T = 0$ ; il suffit de prendre  $t = \pm \frac{1}{9}$ . La cubique dégénère alors en une cubique unicursale.

6. — *Application au problème des arithmodistances.* — J'ai autrefois, dans mes publications sur les *Notions d'arithmogéométrie*<sup>1</sup>, défini le problème des arithmodistances pour une courbe (C) unicursale donnée et pour un arithmopoint F donné: il s'agit de déterminer, par une équation de l'analyse indéterminée, ceux des arithmopoints M de la courbe (C) qui sont situés à une distance rationnelle MF du point F.

Les formules ci-dessus vont maintenant permettre de traiter le cas où la courbe est la cubique de WEIERSTRASS de genre un. Si, en effet, l'arithmopoint imposé F est un foyer réel, pris sur l'axe de symétrie  $Ox$ , et associé aux tangentes isotropes aux points d'argument  $u_0$  et  $-u_0$ , le problème des arithmodistances se réduit à l'étude de l'équation  $p u - p 2u_0 = \square$ . Il paraît à première vue compliqué, et devant conduire à une équation de FERMAT unique mais du sixième degré. En fait, c'est ainsi que se pose la question en toute rigueur. Mais par suite de circonstances spéciales et comme conséquence d'une propriété des fonctions elliptiques, il est possible de donner de la question une solution très simple, présentant d'autre part une généralité exceptionnelle pour ce genre de problèmes de l'analyse indéterminée.

Tout d'abord si  $e$  est une racine de l'équation  $p'u = 0$ , avec  $e = p\omega$ ,  $\omega$  étant une demi-période, la condition pour que la quantité  $-2p u_0 - \frac{1}{4}$  soit égale à  $e$  se traduit (après l'élimination de  $g_3$ ) par une équation entre  $e$  et  $g_2$ , qui est du second degré en  $g_2$ , dont le discriminant est identiquement nul. C'est qu'alors la solution  $u_0$  correspond à l'hypothèse  $p'2u_0 = 0$ ; d'après l'expression générale de  $p'2u_0$ , il vient:

$$g_2 = 12p u_0^2 + 6p u_0 + \frac{1}{2} = 3e^2 - \frac{3}{2}e - \frac{1}{16},$$

<sup>1</sup> *L'Enseignement mathématique*, XVIII<sup>e</sup> année, 1916, p. 107 et 400; XIX<sup>e</sup> année, 1917, p. 170 et p. 252; XX<sup>e</sup> année, 1919, p. 161.

puis ( $\Delta$  étant le discriminant de la fonction elliptique):

$$g_3 = e \left( e^2 + \frac{3}{2}e + \frac{1}{16} \right), \quad \Delta = -\frac{1}{2} \left( 3e + \frac{1}{8} \right) \left( 3e + \frac{1}{4} \right)^4,$$

avec

$$e = p^2 u_0 = -2pu_0 - \frac{1}{4}.$$

Pour  $e = -\frac{1}{12}$ ,  $\Delta = 0$  et la cubique dégénère comme il a été dit. De même la valeur  $e = -\frac{1}{24}$  conduit à une cubique unicursale avec  $g_2 = 3e^2$ ,  $g_3 = e^3$ . Il suffit donc de prendre  $e$  arbitrairement égal à un nombre rationnel quelconque, autre que  $-\frac{1}{24}$  et  $-\frac{1}{12}$ , pour que les formules ci-dessus définissent une cubique de genre un, admettant le sommet ( $x = e$ ,  $y = 0$ ) pour foyer F, associé à la tangente au sommet comme directrice. La relation focale devient

$$\left( \frac{MF}{MP} \right)^2 = 4(pu - e).$$

Si donc  $\nu$  désigne l'argument d'un arithmopoint quelconque de cette cubique, l'expression  $\sqrt{p2\nu - e}$  est rationnelle et, par suite, le problème des arithmodistances pour cette cubique de WEIERSTRASS et pour son sommet-foyer F est résolu en prenant  $u$  égal à tout multiple entier de l'argument  $2\nu$ .

En outre, comme  $pu_0$  est rationnel pour un argument  $u_0$  égal à un quart de période, la constante  $\alpha$  de la formule d'addition d'une demi-période,

$$[p(u + \omega) - e] \cdot [pu - e] = \alpha = 3e^2 - \frac{g_2}{4},$$

est nécessairement le carré d'un nombre rationnel:

$$\sqrt{\alpha} = \mp (pu_0 - e) = \pm \frac{1}{2} \left( 3e + \frac{1}{4} \right).$$

Par suite, si  $pu - p\omega$  est carré parfait, il en est de même de  $p(u + \omega) - p\omega$ , avec ce choix spécial d'invariants. Si M est alors un arithmopoint de la courbe, solution du problème des arithmodistances, la droite FM rencontre la courbe en un nou-

veau point  $M'$  également solution du problème. Entre ces deux solutions existe la relation :

$$\frac{MF}{MP} \cdot \frac{M'F}{M'P'} = 6 \left( e + \frac{1}{12} \right).$$

Si  $u$  et  $v$  sont deux solutions du problème des arithmodistances, il en est de même de la somme ou de la différence  $u \pm v$ , comme conséquence de la formule d'addition mise sous la forme :

$$\sqrt{p(u+v)-e} = \frac{\sqrt{(p^u-e_1)(p^v-e_2)(p^v-e_3)} - \sqrt{(p^v-e_1)(p^u-e_2)(p^u-e_3)}}{p^u - p^v}$$

7. — La formule focale trouvée étant de la forme  $f(MF, MP) = 0$  entraîne des conséquences géométriques. Elle permet de construire géométriquement la normale à la cubique de WEIERSTRASS, puisqu'elle rentre dans la classe des équations en coordonnées bipolaires.

A ce propos, la trace de la normale du point  $u$  sur l'axe ayant pour abscisse  $pu + p''u$ , parmi les normales issues d'un foyer  $F$  se trouvent les droites isotropes. Les deux autres normales, issues de  $F$ , sont définies par l'équation  $pu = -pu_0 - \frac{1}{6}$ .

Si  $(F, D)$  et  $(F', D')$  représentent deux couples de foyers sur l'axe et de directrices droites, la relation entre  $MF$  et  $MD$  entraîne la relation

$$\left( \frac{MF}{MP} \right)^2 - \left( \frac{MF'}{MP'} \right)^2 = \text{const.}$$

Je n'insiste pas sur ces questions relatives aux propriétés des deux ou quatre foyers réels sur l'axe et de leurs directrices associées.

Les foyers en dehors de l'axe et les directrices obliques donnent lieu à des formules analogues, qu'il est possible de déduire aisément de la théorie des fonctions doublement périodiques et de leur décomposition en produits de facteurs  $\sigma(u - \alpha)$ . Je reviendrai prochainement sur cette question.