propos d'un article de M. Winants sur le nombre de lignes de courbure passant par un ombilic.

Autor(en): **F., H.**

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

rait alors, par une transformation conforme, ramener le réseau orthogonal à une forme type simple: la connaissance des singularités de cette forme, et de celles des transformations employées, montrerait ainsi la nature des singularités aux ombilics.

Signalons en particulier, pour les quadriques, surfaces isothermiques, la représentation conforme obtenue par la déformation d'Ivory, où la surface s'aplatit sur le plan en restant homofocale à elle-même.

Le Hâvre, le 9 mars 1926.

P.-C. DELENS.

A propos d'un article de M. Winants sur le nombre de lignes de courbure passant par un ombilic.

1. — *Lettre de M. Emile Picard*, Membre de l'Institut.

Cher Monsieur Fehr,

Dans son numéro paru en janvier 1926 (Tome 24, p. 239), l'*Enseignement mathématique* contient un article de M. Winants, intitulé: « Combien passe-t-il de lignes de courbure par un ombilic ? ». L'auteur dit que cette question n'a été qu'effleurée dans mon *Traité d'Analyse*. Je ne puis partager cette opinion. On trouve dans le Tome III de mon Traité (2^{me} édition, 1908, page 223, une section ayant pour titre: « *Equations du premier ordre et de degré supérieur. Application à la recherche des lignes de courbure passant par un ombilic* », qui avait d'ailleurs été antérieurement résumée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences (11 mars 1895). J'y fais la discussion pour le cas général des points singuliers d'une équation du premier ordre et du second degré, et j'applique les résultats trouvés au problème des lignes de courbure passant par un ombilic. Je montre que, *suivant les cas, il y a une seule ligne de courbure ou une infinité de lignes de courbure passant par un ombilic et ayant pour tangente une des directions données par une certaine équation du troisième degré.* Appliquée aux quadriques, cette étude montre que, pour ces surfaces, il ne passe par un ombilic qu'une seule ligne de courbure, résultat d'ailleurs bien connu.

Je vous serais obligé de bien vouloir insérer cette lettre dans l'*Enseignement mathématique*, et je vous prie de croire, cher Monsieur, à mes sentiments cordialement dévoués.

Paris, le 22 mars 1926.

Emile PICARD.

2. — *Un mémoire publié en 1890 par M. Ch. Bioche* (Paris).

Il y a lieu de signaler ici la Note publiée en 1890 par M. Ch. Bioche, sous le titre « Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic » (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome 18, p. 95 à 106). Nous en reproduisons ci-après l'introduction:

« Voici, en résumé, les considérations qui font l'objet du mémoire suivant:

« Je discute les questions théoriques d'où l'on peut déduire l'équation des lignes de courbure pour un ombilic.

« Après avoir établi des résultats connus, relatifs à la distribution des lignes de courbure qui passent par un ombilic, lorsque l'équation qui détermine leur direction est du troisième degré, je discute un raisonnement erroné de Dupin.

« Je fais remarquer que, contrairement à une assertion de M. Amiot, il passe toujours au moins deux lignes de courbure réelle par tout ombilic pour lequel l'équation est de degré pair. Je montre que, si, par un point où toutes les courbures normales sont nulles, il passe trois lignes asymptotiques, les directions de ces lignes alternent avec celles des lignes de courbure.

« Enfin, je donne la liste des travaux que j'ai pu retrouver et où il est question des lignes de courbure qui passent par un ombilic. »

3. — *Notes bibliographiques.*

Pour compléter la liste établie en 1890 par M. Bioche, il convient de signaler en première ligne l'étude générale publiée par M. Emile Picard dans son *Traité d'Analyse* (T. III) et la Note de G. Darboux, dans sa *Théorie générale des Surfaces* (T. IV, p. 448 et suiv.).

Voir aussi le Traité de Géométrie infinitésimale de M. A. R. Forsyth, *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ch. IV, 1912.

Plusieurs auteurs se sont encore occupés de la question dans des Mémoires spéciaux. Sans avoir la prétention d'être complets, nous citerons les travaux suivants:

Wahlgren, Sur la forme d'une ligne de courbure dans le voisinage d'un ombilic, *Arkiv för Mat. astr. och fys.*, T. I, 1903, page 43-63, Stockholm.

Gullstrund, Zur Kenntnis der Kreispunkte, *Acta Mat.* XXVIII, 1904, p. 59-100.

Korteweg et de Lange, Over twee en meervoudige ombilikaalpunte. *Académie des Sc.*, Amsterdam, 1904, 13, 388-398.

P. Humbert, Sur les ombilics de la surface piriforme, C. R. 1917, CLXV, p. 357-358.

D. DE LANGE, Eenige beschouwingen over enkel- en meervoudige ombilikaalpunten... (Considération sur les ombilics et les lignes de courbure dans leur voisinage). Thèse de doctorat, Delft, 1904, 82 p.

H. F.

Ombilics et lignes de courbure.

M. Fehr m'ayant aimablement signalé la remarque de M. Picard, je me propose d'ajouter quelques indications à l'exposé de M. Picard et à ma note précédente; dans celle-ci, j'avais suivi le plan de l'article de M. Winants et suggéré de rattacher le problème des lignes de courbure aux ombilics à la géométrie conforme; mais les lignes de courbure sont naturellement autre chose que des trajectoires orthogonales ordinaires et on peut aussi les étudier sur une surface donnée sans mettre en jeu les représentations conformes de celle-ci.

Peut-être sera-t-il intéressant à ce sujet de présenter quelques remarques géométriques à côté de la délicate analyse de M. Picard, qui n'a d'ailleurs étudié que le cas *général*, ce qui n'épuise pas le sujet. Interprétons pour cela l'équation du troisième degré qu'utilise M. Picard.

Soient, pour une ligne tracée sur une surface, ds l'élément d'arc, k_g la courbure géodésique, R et T les rayons de courbure normale et de torsion géodésique en un point, H la courbure moyenne de la surface. Il existe, en tout point d'une surface, des éléments géométriques communs aux lignes tracées sur la surface et tangentes en ce point, mis en évidence par Laguerre, puis Darboux; les fonctions de Laguerre et Darboux sont suivies d'autres fonctions plus compliquées qu'on construit facilement de proche en proche; les lignes de la surface, pour lesquelles une de ces fonctions s'annule, sont données par des équations différentielles de degrés successifs 2, 3, .. p, ... de sorte qu'en un point de la surface passent en général 2, 3, ... p, ... telles lignes. Posons:

$$\frac{1}{R} = \Lambda_2' , \qquad \frac{1}{T} = \Delta_2 ,$$

$$\frac{d\frac{1}{R}}{ds} - 2\frac{k_g}{T} = \Lambda_3' , \qquad \frac{d\frac{1}{T}}{ds} + 2k_g\left(\frac{1}{R} - H\right) = \Delta_3 ,$$

Λ_3' et Δ_3 sont les fonctions de Laguerre et de Darboux attachées à une direction; on obtient des chaînes de fonctions plus simples en substituant à Λ_2' et Λ_3':

$$\frac{1}{R} - H = \Lambda_2 \qquad \frac{d\left(\frac{1}{R} - H\right)}{ds} - 2\frac{k_g}{T} = \Lambda_3$$