Sur les bitangentes d'une quartique.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les bitangentes d'une quartique.

A propos des articles de MM. WINANTS et DELENS.

Dans son article *Fonctions elliptiques et quartiques binodales* de *l'Ens. Math.* (tome XXIII, 3, 4, p. 148-163) M. WINANTS a rencontré une difficulté d'élimination en cherchant les bitangentes de la quartique $x = \wp' u$, $y = \wp'' u$. M. DELENS a donné la solution de cette difficulté dans le tome XXIII, 5, 6, p. 327-328 de l'*Ens. Math.* Je veux montrer comment on peut trouver les bitangentes, sans cette difficulté.

Hors de la droite à l'infini les bitangentes joignent des paires de points donnés par les affixes u, v, où $u + v \equiv 0$, ou $\frac{\omega}{2}$ ou $\frac{\omega'}{2}$ ou $\frac{\omega''}{2}$, ω et ω' étant les périodes et $\omega'' = \omega + \omega'$. Si $Ax + By + C = 0$ est une bitangente, la fonction

$$A\wp' u + B\wp'' u + C = A\wp' u + B\left(6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2\right) + C$$

possède deux paires de zéros doubles. Donc, pour $u + v \equiv 0$, on a les conditions nécessaires et suffisantes $u \not\equiv v$ et

$$\begin{aligned} A\wp' u + B\left(6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2\right) + C &= 0\ , \\ -A\wp' u + B\left(6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2\right) + C &= 0\ , \\ A\wp'' u + 12B\wp u \wp' u \qquad\qquad &= 0\ . \end{aligned}$$

Seule solution : $\wp u = 0$, et nous trouvons *une bitangente* joignant les deux points où $\wp u = 0$.

Pour $u + v \equiv \frac{\omega}{2}$, on a les conditions nécessaires et suffisantes $u \not\equiv v$ et

$$\begin{aligned} A\wp' u + B\left\{6\wp^2 u - \frac{1}{2}g_2\right\} + C &= 0\ , \\ A\wp'\left(\frac{\omega}{2} - u\right) + B\left\{6\wp^2\left(\frac{\omega}{2} - u\right) - \frac{1}{2}g_2\right\} + C &= 0\ , \\ A\wp'' u + 12B\wp u \wp' u \qquad\qquad &= 0\ , \end{aligned}$$

donc

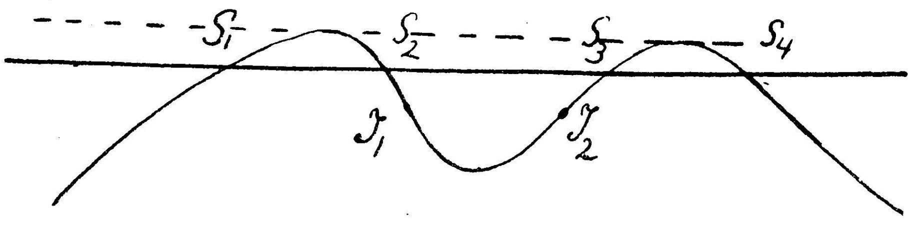
$$\psi(u) = 2\wp u \wp' u \left\{ \wp' u - \wp'\left(\frac{\omega}{2} - u\right) \right\} - \wp'' u \left\{ \wp^2 u - \wp^2\left(\frac{\omega}{2} - u\right) \right\} = 0 \ ;$$

$\psi(u)$ a le point $u = 0$ pour pôle d'ordre 8, le point $u = \frac{\omega}{2}$ pour pôle d'ordre 4, donc $\psi(u)$ a 12 zéros. Les zéros $\frac{\omega}{4}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega''}{2}$ sont doubles et satisfont à $u \equiv \frac{\omega}{2} - u$. Restent 4 zéros, et nous trouvons *deux bitangentes* joignant les deux paires de points correspondants. D'une manière analogue pour $u + v \equiv \frac{\omega'}{2}$ ou $\frac{\omega''}{2}$, donc hors de la droite à l'infini la courbe a 7 bitangentes.

Que la droite à l'infini, qui coupe la courbe en 4 points coïncidant avec le point à l'infini de $x = 0$ doive compter pour une seule bitangente, devient clair si nous cherchons les points d'inflexion. Hors du point à l'infini ces points correspondent aux solutions de

$$\wp^{\mathrm{II}} u + \wp^{\mathrm{IV}} u - (\wp^{\mathrm{III}} u)^2 = 0 \ ,$$

donc il y en a 10. Par suite le point à l'infini compte pour 2 points d'inflexion dans le sens de Plücker. La figure ci-dessous peut illustrer un peu la chose.



Si les points S_i se réunissent, les deux points d'inflexion se réunissent dans le même point.

J. Wolff (Utrecht).

Trajectoires orthogonales et ombilics.

Je voudrais, sans toucher au fond même du problème, ajouter quelques remarques aux intéressantes considérations présentées par M. Marcel Winants dans un récent article (Combien passe-t-il de lignes de courbure par un ombilic ? *L'Enseignement mathématique*, 24me année, p. 239, 1925).

I. Les différentes configurations de trajectoires orthogonales indiquées au premier paragraphe de cet article appartiennent à une