7. — Somme des hauteurs d'un triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

section K d'une des hauteurs non correspondantes avec la circonférence décrite sur le côté opposé à celle-ci comme diamètre).

Les cercles de centres A, B, C et de rayons AK, BP et CT coupent respectivement à angle droit les cercles décrits sur les côtés opposés a, b, c comme diamètres.

7. — Somme des hauteurs d'un triangle.

a) Segments supérieurs (fig. 9).

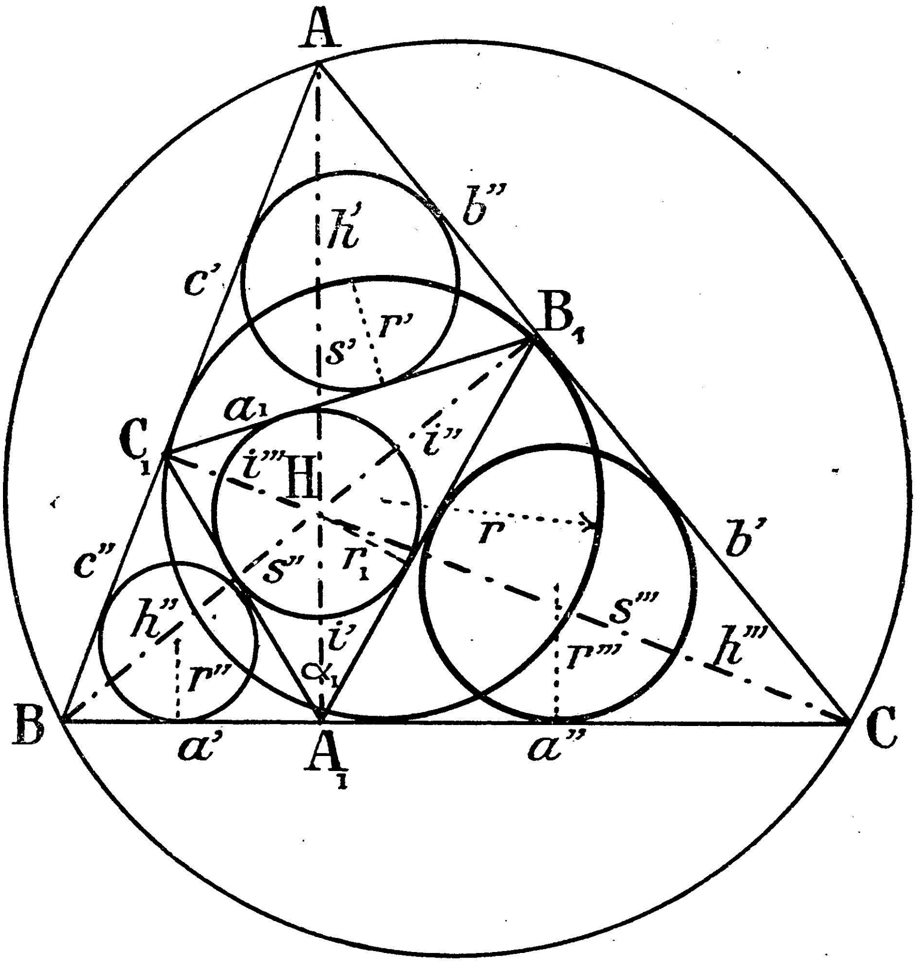

Fig. 9.

$$s' = \frac{b''}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\ .$$

$$\left\{\begin{aligned} s' &= 2R\cos\alpha\ , \\ s'' &= 2R\cos\beta\ , \\ s''' &= 2R\cos\gamma\ . \end{aligned}\right. \qquad (9)$$

$$s' + s'' + s''' = 2R[\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma]\ .$$

Des formules

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} + 1 \, ,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R} \, ,$$

résulte

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r + R}{R} \, . \tag{10}$$

Par suite

$$\underline{s' + s'' + s''' = 2(r + R)} \, , \tag{11}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME X. — *La somme des segments supérieurs des hauteurs d'un triangle est égale à la somme des diamètres des cercles inscrit et circonscrit.*

b) SEGMENTS INFÉRIEURS (fig. 9).

$$i' = \mathrm{BH} \, . \cos\gamma = s'' \cos\gamma = (2R \cos\beta) \cos\gamma \, .$$

$$\left\{ \begin{aligned} i' &= 2R \cos\beta \cos\gamma \, , \\ i'' &= 2R \cos\gamma \cos\alpha \, , \\ i''' &= 2R \cos\alpha \cos\beta \, . \end{aligned} \right. \tag{12}$$

$$i' + i'' + i''' = 2R[\cos\alpha \cos\beta + \cos\beta \cos\gamma + \cos\gamma \cos\alpha] \, . \tag{13}$$

Or la parenthèse peut s'exprimer en fonction des rayons r et R des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné et du rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs. D'après (10), on a

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r + R}{R} \, ,$$

d'où, en élevant au carré,

$$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 2[\cos\alpha \cos\beta + \cos\beta \cos\gamma + \cos\gamma \cos\alpha] =$$
$$= \frac{r^2 + 2rR + R^2}{R^2} \, .$$

De la relation des cosinus , on tire

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \, .$$

Or

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{r_1}{2R} \, . \tag{14}$$

En effet (fig. 9),

$$r_1 = i' \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) ;$$

$$i' = a' \operatorname{tg}(90 - \gamma) = c . \cos \beta \operatorname{cotg} \gamma ;$$

$$\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \sin(90 - \alpha) = \cos \alpha .$$

Donc

$$r_1 = c \cos \beta \operatorname{cotg} \gamma \cos \alpha = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \beta \cos \gamma \cos \alpha ,$$

$$r_1 = 2R(\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) ,$$

d'où

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{r_1}{2R} .$$

Par suite

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{R - r_1}{R} . \tag{15}$$

Remplaçons ci-dessus

$$\frac{R - r_1}{R} + 2[\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha] = \frac{r^2 + 2rR + R^2}{R^2} ,$$

d'où l'on tire

$$[\cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha] = \frac{r^2 + 2rR + r_1 R}{2R^2} . \tag{16}$$

En portant cette valeur dans la relation (13), on obtient

$$\underline{i' + i'' + i''' = r + r_1 + \left(r + \frac{r^2}{R}\right)} . \tag{17}$$

L'expression entre parenthèses peut s'exprimer en fonction des rayons r', r'', r''' des cercles inscrits dans les triangles aux sommets AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Ces triangles étant semblables au triangle donné ABC, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a} = \cos \alpha .$$

$$r' = r \cos \alpha , \quad r'' = r \cos \beta , \quad r''' = r \cos \gamma .$$

$$r' + r'' + r''' = r(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) ,$$

ou, en vertu de (10)

$$r' + r'' + r''' = \left(\frac{r^2}{R} + r\right) . \tag{18}$$

La relation (17) devient donc

$$\underline{i' + i'' + i''' = r + r_1 + r' + r'' + r'''} \,, \tag{19}$$

c'est-à-dire

Théorème XI. — *La somme des segments inférieurs des hauteurs d'un triangle est égale à la somme des rayons des cercles inscrits dans le triangle donné, le triangle des pieds des hauteurs et les triangles aux sommets.*

c) Somme des hauteurs.

Première expression. — En additionnant les relations (11) et (17) membre à membre, on obtient

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 4r + r_1 + \frac{r^2}{R}} \,, \tag{20}$$

relation exprimant la somme des hauteurs en fonction des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné et du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.

Deuxième expression. — En additionnant les relations (11) et (19) membre à membre, on obtient pour la somme des hauteurs

$$\underline{h' + h'' + h''' = 2R + 3r + r_1 + r' + r'' + r'''} \,. \tag{21}$$

Cette formule exprime la *somme des hauteurs* d'un triangle en fonction du rayon du cercle circonscrit et des rayons des cercles inscrits dans le triangle considéré, le triangle des pieds des hauteurs et les triangles aux sommets.

La somme des hauteurs est donc une *fonction entière* (très simple) de ces différents rayons.

Remarque. — De (9) et (12) résulte

$$s' . s'' . s''' = 8R^3 (\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma) \,,$$

et

$$i' . i'' . i''' = 8R^3 (\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)^2 \,.$$

Mais (14)

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{r_1}{2R} \,.$$

Par suite

$$\underline{s' . s'' . s''' = r_1 . D^2} \,, \qquad \text{où} \quad D = 2R \,, \tag{22}$$

$$\underline{i' . i'' . i''' = r_1^2 . D} \,, \tag{23}$$

$$\underline{s' . s'' . s''' . i' . i'' . i''' = r_1^3 . D^3} \,, \tag{24}$$

$$\underline{\frac{i' . i'' . i'''}{s' . s'' . s'''} = \frac{s' . s'' . s'''}{(2R)^3}} \,. \tag{25}$$