T. Carleman. — Les fonctions quasi-analytiques. Leçons professées au Collège de France (Collection E. Borel). Un volume gr. in-8° de 116 pages. Prix :30 francs. Gauthier-Villars et Cie Paris, 1926.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

conduit à la célèbre fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Ceci suffit déjà amplement à montrer leur importance.

Bien que toutes les séries de Dirichlet ne soient évidemment pas du type où λ_n est égal à n, on se rend compte immédiatement que la théorie des séries entières a beaucoup guidé les recherches. La convergence d'une série entière n'a lieu que dans un cercle, c'est-à-dire dans une région du champ complexe située *du même côté* d'une circonférence ; la convergence d'une série de Dirichlet a lieu *du même côté* d'une droite d'où la notion du *demi-plan* de convergence. Nombre de théorèmes sur l'allure singulière d'une fonction analytique dans le voisinage du cercle de convergence se retrouvent ici dans le voisinage de la droite de convergence ; les résultats tayloriens de MM. Hadamard, Borel, Fabry, Mittag-Leffler,... en reçoivent comme un lustre complémentaire. Il en est de même des théorèmes d'Abel.

Les choses deviennent plus intéressantes encore avec les procédés d'extension analytique. On peut imaginer des déterminations des λ_n pour lesquelles certaines méthodes de prolongement analytique, nées à propos de séries entières, s'appliquent encore mieux aux séries de Dirichlet. Des méthodes de sommabilité déplacent avantageusement la droite de convergence, d'autres la font disparaître et permettent de prolonger la série en s, dans tout le champ complexe, en une étoile d'holomorphie qui a, en ce cas, ses rayons parallèles mais n'en correspond pas moins à l'étoile plus véritablement étoilée de M. Mittag-Leffler.

H. Bohr a relié l'existence même des séries de Dirichlet à des constructions arithmétiques diophantiques d'où il passe à de très originales considérations sur les fonctions quasi-périodiques. H. Weyl, si connu pour ses travaux parallèles à ceux d'Einstein, a également travaillé à cette partie d'une théorie qui, dominant à la fois la fonction à variable complexe et la fonction à variable réelle, présente une généralité propre à tenter l'esprit d'application dans ses manifestations les plus diverses. Il me semble, du moins, que M. Valiron nous a montré tout cela d'une manière fort remarquable.

A. Buhl (Toulouse).

T. Carleman. — **Les fonctions quasi-analytiques.** Leçons professées au Collège de France (Collection E. Borel). Un volume gr. in-8° de 116 pages. Prix : 30 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

La théorie des fonctions quasi-analytiques a, dans le passé, des racines plus diverses qu'on ne le croit généralement. On en trouve un premier germe dans la Thèse de M. Emile Borel publiée il y a une trentaine d'années ; elle se rattache aux séries asymptotiques étudiées par Henri Poincaré dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (T. 1, chap. VII) et cela a déjà donné lieu à une fort remarquable exposition d'ensemble de M. Borel en ses *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe* analysées d'ailleurs en cette Revue (T. 20, 1918, p. 143). Le nouveau volume nous met au courant des progrès réalisés depuis la rédaction de ces dernières *Leçons*.

Le sujet, au fond, semble avoir ses assises dans les immenses progrès faits par la notion d'intégration, progrès qui, de par la nature même des choses, ne pouvaient avoir leur pendant du côté de la notion de dérivation. Dès lors le point de vue de Cauchy, à caractère intégral, était manifestement généralisable ; le point de vue de Weierstrass, à caractère differentiel, ne l'était pas autant. Ceci ne signifie pas, en effet, que du côté de la fonction quasi-analytique nous ne trouverons rien qui ressemble à un développement en série entière mais il y faudra le secours des méthodes boréliennes de prolongement, des fractions continues de Stieltjes et, tout particulièrement, des séries asymptotiques de Poincaré.

Il y a évidemment lieu de se demander si l'extension quasi-analytique ne repose pas sur des opérations d'une transcendance inexécutable ou bien si le quasi-analytique contient vraiment autre chose que l'analytique ; or les réponses à ces questions sont maintenant des plus simples et des plus explicites. Des séries de fractions rationnelles du plus élégant aspect, des séries trigonométriques représentent très naturellement des fonctions quasi-analytiques. D'ailleurs des séries de fractions rationnelles on peut passer aux séries de fonctions uniformes ; de telles suites peuvent admettre des fonctions limites d'une quasi-analyticité irréductible à l'analyticité.

N'épiloguons pas davantage sur ce livre, à la fois bel et bref, qu'on ne jugera bien que par une étude directe. Il parait très complet au point de vue bibliographique. Il renseigne sur de très nombreuses notes publiées, dans ces dernières années, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, par MM. Borel, Denjoy, Holmgren, La Vallée-Poussin, Montel, Nevanlinna, Riesz,... et par M. Carleman lui-même.

C'est de la science très rigoureuse, très esthétique et, ne craignons pas de le dire, très objective. Des comparaisons extrêmement intéressantes seraient à faire avec les *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des Fonctions analytiques d'une variable réelle* de M. S. Bernstein, leçons analysées dans notre dernier fascicule (ce tome, p. 141). Ainsi, d'une part, la variable complexe semble perdre du terrain, mais elle a créé l'analytique qui se révèle fécond en généralisations ; l'idée de perte n'a donc aucune raison d'être, les progrès des théories en litige n'apportant partout que gains et perfectionnements. A. Buhl (Toulouse).

E. Borel. — **Calcul des Probabilités. Applications à l'Arithmétique et à la Théorie des Fonctions.** — Tome II, fascicule I du *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* publié par M. Emile Borel avec la collaboration de L. Blaringhem, C.-V.-L. Charlier, R. Deltheil, P. Dubreil, M. Fréchet, H. Galbrun, J. Haag, R. Lagrange, F. Perrin, P. Traynard. — Un vol. gr. in-8° de 104 pages. Prix : 17 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Brillant et intéressant fascicule rédigé, d'après les leçons de M. Emile Borel, par M. Paul Dubreil, élève de l'Ecole normale supérieure. Il débute par une application de la loi des écarts à l'étude des nombres décimaux ; il s'agit de la distribution des chiffres dans ces nombres, distribution certaine tant qu'elle résulte d'un calcul précis et qui pourrait continuer à être certaine si le calcul était continué, mais qui, dans le cas contraire, n'est plus que probable, la probabilité correspondant ici non à un manque de détermination, mais à l'ignorance où nous sommes de celle-ci. Il y a une correspondance remarquable entre les nombres à distribution improbable et les ensembles de mesure nulle et l'on ne peut juger complètement du caractère probable ou improbable d'une distribution sans considérations sur le système de numération employé. Et voilà déjà l'arithmétique, les ensembles et les probabilités curieusement agglomérés.