En introduisant par exemple dans l'équation (15) une racine $x = u = -\frac{3}{4}$ nous trouvons pour α_M la valeur $3\cdot 44 < \alpha_M < 3\cdot 45$, qui est plus petite que les valeurs obtenues par les méthodes précédentes. En introduisant à la fois deux nouvelles racines $x = u = -3$ et $x = v = -1$, nous trouvons une valeur α_M contenue dans l'intervalle $3\cdot 2 < \alpha_M < 3\cdot 3$, donc plus précise encore que dans le cas précédent. L'étude approfondie des méthodes de cette espèce ne me semble pas privée d'intérêt.

UNE REPRÉSENTATION DE L'EXCÈS SPHÉRIQUE D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE (HAMILTON)

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

La présente note est rédigée d'après l'ouvrage de M. Tait sur les quaternions. Je rappelle en premier lieu des définitions et des propriétés des triangles sphériques qui en faciliteront la lecture.

Quotient de vecteurs — Verseurs — Arcs de grand cercle.

1. Soient α, β deux vecteurs OA, OB. Appelons quotient q de β par α une quantité définie par l'égalité

$$\beta = \alpha \times q \ ,$$

Ce qui donne

$$\alpha^{-1} . \beta = \alpha^{-1} . \alpha . q = q \ .$$

Nous poserons donc

$$q = \frac{\beta}{\alpha} = \alpha^{-1} . \beta \ ,$$

q est un quaternion. Quand les tenseurs de α et de β sont égaux, q est un verseur.

On aurait de même

$$\frac{\alpha}{\beta} = \beta^{-1} . \alpha .$$

On en déduit

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\alpha} = \beta^{-1} \alpha \alpha^{-1} \gamma = \beta^{-1} \gamma = \frac{\gamma}{\beta} .$$

Supposons maintenant que les tenseurs de α, β, γ soient égaux à l'unité. Pour fixer les idées [1] soient

$$\alpha = i , \quad \beta = i \cos \theta + j \sin \theta .$$

alors

$$\alpha^{-1} \beta = - i(i \cos \theta + j \sin \theta) = \cos \theta - k \sin \theta ,$$

Il en résulte que le quotient du vecteur β par α est égal au verseur dont l'angle est égal à l'angle (OB, OA) et dont l'axe est le vecteur opposé à k.

De même

$$\beta^{-1} \alpha = \cos \theta + k \sin \theta .$$

L'arc de grand cercle $\widehat{AB}$, tracé sur la sphère de rayon 1 détermine complètement le verseur égal à $\frac{\alpha}{\beta}$. Nous poserons

$$\frac{\alpha}{\beta} = \beta^{-1} \alpha = (AB) .$$

Cela étant, considérons le triangle sphérique ABC. On a

$$\frac{\alpha}{\beta} = (AB) , \quad \frac{\gamma}{\alpha} = (CA) , \quad \frac{\gamma}{\beta} = (CB) ;$$

L'égalité

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

peut s'écrire ainsi:

$$(AB) \times (CA) = (CB) .$$

De même

$$(BA) \times (CB) = (CA) .$$

2. *Exemples:* 1° Soient

$$\alpha = i , \quad \beta = j , \quad \gamma = k$$

---

[1] Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques,* juillet 1924. Démonstration d'une formule d'Hamilton, B. N.

nous aurons:

$$\frac{i}{j} = -ji = k \ , \qquad \frac{k}{i} = -ik = j \ .$$

On en déduit

$$\frac{k}{j} = kj = -i \ .$$

Directement, on a:

$$\frac{k}{j} = -jk \ .$$

et l'on a bien

$$kj = -jk \ .$$

2° Supposons que M soit le milieu de l'arc AB nous aurons:

$$(\mathrm{MB})(\mathrm{AM}) = (\mathrm{AB}) \ .$$

Mais (MB) = (AM); donc

$$(\mathrm{MB}) = (\mathrm{AM}) = (\mathrm{AB})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Propriété des triangles sphériques.

3. Soit ABC un triangle sphérique tracé sur une sphère de rayon égal à l'unité. Soit C′ le point symétrique de C sur la sphère donnée. Appelons P le pôle du triangle ABC′; je dis que P est aussi pôle du grand cercle passant par les milieux D, E des côtés CB, CA. En effet, le rayon OP est dans le plan perpendiculaire au milieu de la corde $\overline{\mathrm{AC}'}$ puisque $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PC}'}$. Le rayon OE est perpendiculaire au milieu de la corde AC et par suite parallèle à la corde AC′, donc perpendiculaire à OP, d'où $\widehat{\mathrm{PE}} = \frac{\pi}{2}$. De même, $\widehat{\mathrm{PD}} = \frac{\pi}{2}$. La proposition est ainsi établie.

4. Désignons par α chacun des angles à la base du triangle sphérique isoscèle PAB, par β ceux de PAC′ et par γ ceux de PAA′.

En appelant A, B, C les angles du triangle sphérique ABC, on a:

$$\mathrm{A} = \pi - \alpha - \beta \ , \qquad \mathrm{B} = \pi - \alpha - \gamma \ , \qquad \mathrm{C} = \gamma + \beta \ ,$$

d'où

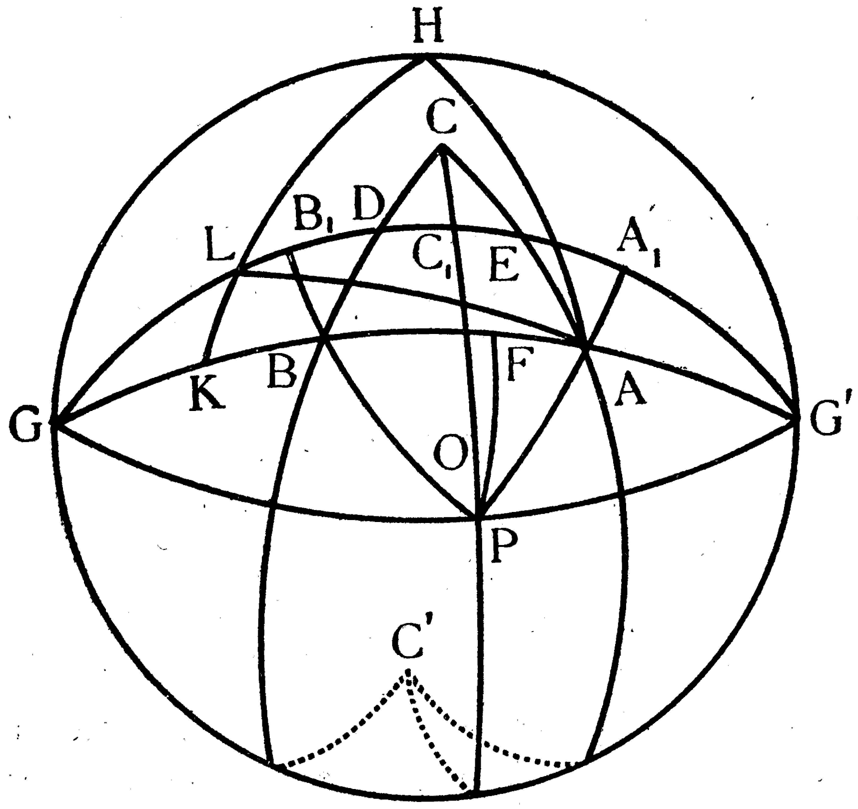
$$A + B + C = 2\pi - 2\alpha ,$$

et par suite:

$$A + B + C - \pi = \pi - 2\alpha .$$

Donc, si l'on appelle σ l'excès sphérique du triangle ABC

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2} .$$



5. Soient G et G′ les points communs aux deux grands cercles AB, DE et considérons le grand cercle GPG′. Le point P étant le pôle du grand cercle DE, on a $\widehat{PG} = \widehat{PG'} = \frac{\pi}{2}$. Donc P est le milieu de l'arc $\widehat{GPG'}$. Soit F le premier point de rencontre du grand cercle $\widehat{AB}$ et du grand cercle de pôle G; le grand cercle $\widehat{PF}$ est perpendiculaire au grand cercle AB, F est donc le milieu de l'arc GFG′; mais PA = PB, par suite F est aussi le milieu de l'arc AB. On voit ainsi que chacun des points G, G′ est à 90° du milieu F de l'arc AB.

6. *Remarque.* La propriété qu'on vient d'établir permet de construire le triangle ABC circonscrit au triangle DEF de façon que les sommets du second soient les milieux des côtés du premier.

En effet, le point G étant sur $\widehat{DE}$ à 90° de F est connu; donc $\widehat{AB}$ est déterminé par les points G et F; on déterminera de même les deux autres côtés.

7. *Evaluation de l'excès sphérique du triangle* ABC *au moyen d'un verseur.*

Conservons les mêmes notations et supposons en outre que le plan de la figure soit perpendiculaire au rayon OF. Le milieu H du grand cercle GHG′ est le pôle du grand cercle AB, donc $\widehat{HA} = \frac{\pi}{2}$. De A comme pôle, décrivons un grand cercle qui coupe GFG′ en K et GDEG′ en L. De $\widehat{GF} = \widehat{KA} = \frac{\pi}{2}$, il résulte que $\widehat{GK} = \widehat{FA} = \widehat{BF}$. Je dis que $\widehat{GL} = \widehat{DE}$. Pour le voir, joignons par des arcs de grands cercles le point P aux points A, B, C, C′, on a $\widehat{AA_1} = \widehat{BB_1} = \widehat{CC_1}$, car ces arcs valent respectivement $\frac{\pi}{2} - \widehat{PA}$, $\frac{\pi}{2} - \widehat{PB}$, $\pi - \widehat{C_1DC'} = \pi - \frac{\pi}{2} - \widehat{PC'} = \frac{\pi}{2} - \widehat{PC'}$; or $\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{PC'}$. Il en résulte que les triangles sphériques rectangles A_1AE et C_1CE sont symétriques: donc $\widehat{C_1E} = \widehat{EA_1}$ et pareillement $\widehat{B_1D} = \widehat{DC_1}$ d'où $\widehat{B_1A_1} = \widehat{2DE}$. Remarquons maintenant que $\widehat{GB} = \widehat{AC'}$ et comme on a aussi $\widehat{BB_1} = \widehat{AA_1}$ les triangles sphériques rectangles GBB_1 et $G'AA_1$ sont symétriques et par suite on a encore $\widehat{GB_1} = \widehat{A_1G'}$. D'autre part, dans le triangle sphérique LAA_1, $\widehat{LA} = \frac{\pi}{2}$ et l'angle A_1 est droit; d'ailleurs $AA_1 \neq \frac{\pi}{2}$, donc $\widehat{LA_1} = \frac{\pi}{2}$ et l'angle $\widehat{LAA_1}$ est droit. Ensuite $\widehat{GB_1} + \widehat{B_1A_1} + \widehat{A_1G'} = \pi$, c'est-à-dire $\widehat{2GB_1} + \widehat{2DE} = \pi$ ou $\widehat{GB_1} + \widehat{DE} = \frac{\pi}{2}$. A cause de $\widehat{LA_1} = \frac{\pi}{2}$, on a: $\widehat{GL} + \widehat{A_1G'} = \frac{\pi}{2}$, ce qui permet d'écrire $\widehat{GL} + \widehat{GB_1} = \frac{\pi}{2}$. On a donc enfin $\widehat{GL} = \widehat{DE}$. Cela posé, les angles $\widehat{LAA'}$ ou $\widehat{LAP}$ et $\widehat{HAG}$ étant droits, on en déduit $\widehat{HAL} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2}$. On peut prendre pour mesure de $\widehat{HAL}$ la mesure de l'arc du grand cercle $\widehat{HL}$ et poser

$$\widehat{HL} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2},$$

σ désignant toujours l'excès sphérique du triangle ABC.

Nous allons maintenant introduire les verseurs.

On a

$$(LH) = (GH) \times (LG) .$$

Or

$$(GH) = \gamma , \qquad (LG) = (ED) = \alpha^{-1}\beta .$$

On voit ainsi que $\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2}$ est l'angle du verseur $\alpha^{-1}\beta$ dont l'axe est le vecteur $\overline{OA}$. Si l'on désigne $\overline{OA}$ par a on peut poser

$$\alpha^{-1}\beta = \sin\frac{\sigma}{2} + a\cos\frac{\sigma}{2} .$$

D'autre part l'arc $\overset{\frown}{LK}$ est le complément de $\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{2}$ donc il est précisément égal à $\frac{\sigma}{2}$.

Mais

$$(LK) = (GK) \times (LG) ,$$

$$(LG) = (ED) = (CD) \times (EC) = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} , \qquad (2,\ 2^\circ)$$

$$(GK) = (BF) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

et enfin

$$(LK) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} ,$$

a, b, c étant les vecteurs $\overline{OD}$, $\overline{OE}$, $\overline{OF}$.

Le verseur $\overset{\frown}{LK}$ a donc pour angle $\frac{\sigma}{2}$ et l'on voit que son axe est $- a$.

On peut poser

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\sigma}{2} - a\sin\frac{\sigma}{2}$$

et l'on peut remarquer que

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = -(\gamma\alpha^{-1}\beta)^2 = -(\gamma\alpha\beta)^2 .$$