SUR L'EXISTENCE D'UNE LIMITE CONSIDÉRÉE PAR M. HADAMARD

Autor(en): **Pólya, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515752

parallèles à l'axe réel. C'est ce que montra M. G. Mittag-Leffler dans sa Sixième Note.

En la matière, le dernier mot du fantastique appartient à M. Karl Grandjot, de Göttingen, qui dans un écrit de cinq pages *Ueber Grenzwerte ganzer transzendenter Funktionen* (Mathematische Annalen, Band 91, Heft 3, 4; 1924) vient de construire une fonction entière qui tend vers zéro quand la variable va à l'infini le long d'une branche de courbe *algébrique* quelconque, ce qui n'empêche pas que le long de certains chemins transcendants la fonction peut devenir infinie, sauvant encore le théorème de Cauchy-Liouville-Weierstrass qui, à vrai dire, n'a jamais été menacé.

Nous voici assez loin des remarques élémentaires arrêtées au paragraphe précédent. Mais ceci montre combien le sujet est vivant et pourrait inspirer de Diplômes d'Etudes sans parler de Mémoires beaucoup plus élevés.

SUR L'EXISTENCE D'UNE LIMITE CONSIDÉRÉE PAR M. HADAMARD

PAR

G. PÓLYA (Zurich).

La remarque très élémentaire qui suit se rattache à un passage du Mémoire fondamental de M. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* [1]. Il s'agit de la recherche des singularités polaires. Il faut démontrer — c'est le point délicat du raisonnement [2] — que l'existence de la *limite supérieure* d'une certaine quantité entraîne, dans les conditions particulières données, l'existence de la *limite* de la même

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 4me série, t. 8, 1892. Voir en particulier p. 120-122.

[2] J. HADAMARD, *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Collection Scientia, 1901, p. 40).

quantité. La difficulté, mise à nu, se réduit à la démonstration de la proposition suivante:

Soient $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *des quantités réelles non-négatives,*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = a \ .$$

Si la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ *est assujettie à la condition*

$$p_{n+1}p_{n-1} - p_n^2 > -\alpha^{2n} \tag{1}$$

pour n *suffisamment grand, où* α *est une constante,* $0 < \alpha < a$, *on a nécessairement*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} = a \ .$$

Voici une démonstration fondée sur un principe facile à saisir et différant un peu de celle donnée par M. Hadamard.

Comparons la suite $p_1, p_2, p_3, \ldots$ à une autre $q_1, q_2, q_3, \ldots$ qui, au lieu de satisfaire à l'inégalité (1), satisfait à l'équation recurrente

$$q_{n+1}q_{n-1} - q_n^2 = -\alpha^{2n} \ . \tag{2}$$

Beaucoup de démonstrations sont fondées sur des « comparaisons » analogues. Guidé par les résultats mêmes de M. Hadamard, à la démonstration desquels le théorème énoncé sert de lemme, on essaie de satisfaire à l'équation (2) en mettant

$$q_n = \beta^n - c\gamma^n \ .$$

On y satisfait effectivement si les constantes β, γ, c sont assujetties aux relations

$$\beta\gamma = \alpha^2 \ , \qquad c(\beta - \gamma)^2 = \beta\gamma \ .$$

On choisit β arbitrairement mais tel que

$$\alpha < \beta < a \ .$$

En déterminant d'abord γ puis c on trouve

$$q_n = \beta^n \left[1 - \left(\frac{\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{2n} \right] .$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_n} = \beta < a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_n} . \tag{3}$$

Si n est suffisamment grand, $n > \mathrm{N}$, on a

$$q_n > \alpha^n \tag{4}$$

et l'inégalité (1) est aussi valable. En vertu de (3) il existe certainement une infinité d'indices n tels que

$$p_n > q_n .$$

Si cette dernière inégalité *n'est pas* constamment satisfaite pour $n > \mathrm{N}$ on trouvera deux indices *consécutifs* $m-1$ et m tels que

$$p_{m-1} \leqq q_{m-1} , \qquad p_m > q_m , \qquad m > \mathrm{N} .$$

Des inégalités

$$\frac{p_m}{p_{m-1}} > \frac{q_m}{q_{m-1}} , \qquad p_m > q_m > \alpha^m \tag{5}$$

combinées avec (1), (2), (4), il résulte

$$\frac{p_{m+1}}{p_m} > \frac{p_m}{p_{m-1}}\left(1 - \frac{\alpha^{2m}}{p_m^2}\right) > \frac{q_m}{q_{m-1}}\left(1 - \frac{\alpha^{2m}}{q_m^2}\right) = \frac{q_{m+1}}{q_m}$$

$$\frac{p_{m+1}}{p_m} > \frac{q_{m+1}}{q_m} , \quad p_{m+1} > q_{m+1} > \alpha^{m+1} .$$

C'est-à-dire on peut remplacer m par $m+1$ dans l'inégalité (5). Par les mêmes calculs on a

$$\frac{p_{m+2}}{p_{m+1}} > \frac{q_{m+2}}{q_{m+1}} , \qquad p_{m+2} > q_{m+2} > \alpha^{m+2}$$

et ainsi de suite. Donc étant donné β, $a > \beta > \alpha$, nous savons déterminer un entier m tel que l'on ait pour $n=m, m+1, m+2, \ldots$

$$p_n > \beta^n \left[1 - \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n}\right] .$$

C. q. f. d.