§ 6. Autres procédés de sommation.

En particulier donc, si $p = 1$, nous voyons qu'une série de Fourier restreinte de classe 1, telle que $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ jouit dans l'intervalle de restriction et relativement à la convergence ordinaire de toutes les propriétés d'une série de Fourier.

M. Young a fait de ces séries une application importante à l'étude de la convergence des séries de polynomes de Legendre [1], des séries de fonctions de Bessel [2] et de certaines séries trigonométriques non harmoniques [3]. Une autre application intéressante [4] généralise un théorème de Fatou [5] affirmant qu'une série de puissances $\Sigma a_n z^n$, telle que $a_n \to 0$, de rayon de convergence 1, converge sur le cercle de convergence en tout point de régularité de la fonction analytique engendrée par la série. Ce théorème de Fatou a été dans sa démonstration notablement simplifié par M. M. Riesz [6] qui a montré de plus que la convergence est uniforme sur un arc de régularité et qui a, en remplaçant la condition $a_n \to 0$ par la condition $\frac{a_n}{n^\delta} \to 0$ ($\delta \geqq 0$), montré que le théorème subsiste, à condition de remplacer la convergence ordinaire par la convergence (C, δ). Si $\left|\frac{a_n}{n^\delta}\right| < M$, les sommes partielles de la série restent bornées (C, δ) aux points de régularité.

§ 6. Autres procédés de sommation.

1. Il est quelquefois utile d'introduire d'autres procédés de sommation équivalents au procédé de Cesàro. C'est ainsi qu'on peut, pour les indices δ positifs entiers, définir avec Hölder [7] un procédé de sommation que MM. Knopp [8] et Schnee [9] ont montré équivalent au procédé de sommation (C, δ). Chapman [10], M. Riesz [11] et W. H. Young [12] ont étudié de tels procédés.

2. M. de la Vallée-Poussin [13] a donné un procédé nouveau pour sommer une série $\sum_0^\infty u_n$; il consiste à donner comme

---

[1] W. H. Young 29, 30. — [2] W. H. Young 35. — [3] W. H. Young 34. — [4] W. H. Young 32. — [5] Fatou 1. — [6] M. Riesz 3, 5, 6. — [7] Hölder. — [8] Knopp 1, 2, 3. — [9] Schnee; voir aussi Landau 1, 2. — [10] Chapman 1. — [11] M. Riesz 1, 2; voir aussi Hardy and Riesz 1. — [12] W. H. Young 3. — [13] Vallée-Poussin 2.

somme à la série la limite de

$$V_n = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} u_k \quad . \qquad (20)$$

Ce procédé est plus puissant que celui de Cesàro d'ordre quelconque. On peut en effet montrer[1] que toute série sommable (C, δ) est *sommable* (V. P), c'est-à-dire par le procédé de M. de la Vallée-Poussin; mais que, par contre, il existe des séries sommables (V. P) qui ne sont sommables par aucune moyenne de Cesàro.

Si l'on somme une série de Fourier par le procédé (V. P.) on voit que la série a pour somme (V. P.) l'expression

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \int_0^t [f(x+t) + f(x-t)]\,dt$$

en tout point où cette limite existe, donc presque partout et que si, au point x, f possède une dérivée généralisée d'ordre k, la série obtenue en dérivant p fois terme à terme la série de Fourier de f converge (V. P.) vers cette dérivée généralisée. Pour toute fonction intégrable

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - V_n(x)|\,dx = 0$$

V_n désignant la n-ième somme partielle (V. P.) de la série de Fourier de f.

λ désignant une constante, le procédé de sommation où l'on remplace V_n par

$$V_n^\lambda = u_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+2\lambda+1)(n+2\lambda+2)\dots(n+2\lambda+k)} u_k$$

est équivalent au procédé de M. de la Vallée-Poussin[2].

3. D'autres procédés de sommation interviennent dans cer-

[1] Gronwall 6, 7; Moore. — [2] Kogbetliantz 1.

taines recherches; c'est le cas du *procédé de sommation dit de Poisson*, où l'on cherche la limite pour $r \to 1-0$ de la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n$$

et de celui qui se présente dans la *théorie de la propagation de la chaleur :*

$$\lim_{r \to 1-0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) r^{n^2} \right]$$

Notons encore le *procédé de Riemann :*

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty \left(\frac{\sin nh}{nh} \right)^2 (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right].$$

Ces divers procédés possèdent dans le cas des séries de Fourier des propriétés analogues à celles que possède le procédé de M. de la Vallée-Poussin [1].

§ 7. La théorie des constantes de Fourier.

1. L'idée d'édifier à côté de la théorie de la convergence des séries de Fourier une théorie des suites des constantes de Fourier semble avoir été formulée pour la première fois d'une façon nette par Hurwitz [2] qui a montré que l'on peut additionner et multiplier entre elles les équivalences des fonctions intégrables bornées et qu'une équivalence intégrée terme à terme donne lieu à une égalité. Le problème général de cette théorie des constantes de Fourier est le suivant: De propriétés connues de $f(x)$, quelles conséquences conclure pour la suite de ses constantes de Fourier et inversement.

En réalité on sait très peu de choses sur les caractéristiques d'une suite de constantes de Fourier. On sait que $a_n \to 0$ et que $\sum_1^\infty \frac{b_n}{n}$ converge [3]. Il n'existe pas de fonction $\lambda(n)$ telle que

[1] Vallée-Poussin 2, Hahn 1. — [2] Hurwitz 3. — [3] Lebesgue 5, p. 102, 124.