MÉTHODE D'HAMILTON POUR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION VECTORIELLE DU PREMIER DEGRÉ

Autor(en): **Niewenglowski, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515763

MÉTHODE D'HAMILTON POUR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION VECTORIELLE DU PREMIER DEGRÉ

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Dans son beau *Traité élémentaire des quaternions*, M. P.-G. TAIT, voulant exposer la méthode suivie par HAMILTON pour résoudre une équation vectorielle du premier degré, s'exprime ainsi: « Nous arrivons maintenant à l'admirable investigation d'Hamilton ».

J'espère avoir rendu un peu plus facile l'exposé de Tait; un lecteur, même peu familiarisé avec l'emploi des quaternions, pourra ainsi apprécier la belle solution donnée par Hamilton.

1. Rappelons quelques formules. Etant donnés deux quaternions q, r; les scalaires des produits qr et rq sont égaux, c'est-à-dire

$$Sqr = Srq\ .$$

2. Soient α, β, γ trois vecteurs non coplanaires et α', β', γ' trois autres vecteurs. Chacun de ces derniers s'exprime linéairement au moyen des trois premiers, de telle sorte que

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= a.\alpha + b.\beta + c.\gamma \\ \beta' &= a'.\alpha + b'.\beta + c'.\gamma \\ \gamma' &= a''.\alpha + b''\beta + c''\gamma\ ; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

nous poserons

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

et nous supposerons $\Delta \neq 0$.

Il s'agit de prouver que

$$S.\alpha'\beta'\gamma' = S.\alpha\beta\gamma.\Delta\ . \tag{2}$$

Pour établir cette identité, il suffit d'exprimer les six vecteurs considérés au moyen des vecteurs unités fondamentaux i, j, k, en posant

$$\begin{aligned}\alpha &= ix + jy + kz\\ \beta &= ix' + jy' + kz'\\ \gamma &= ix'' + jy'' + kz''\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha' &= iX + jY + kZ\\ \beta' &= iX' + jY' + kZ'\\ \gamma' &= iX'' + jY'' + kZ''\end{aligned}$$

en substituant dans (1) on trouve

$$\begin{aligned}X &= ax + bx' + cx''\\ Y &= ay + by' + cy''\\ Z &= az + bz' + cz''\end{aligned}$$

$$X' = a'x + b'x' + c'x''\ , \quad \text{etc.}$$

Or,

$$S\alpha\beta\gamma = -\begin{vmatrix} x & y & z\\ x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\end{vmatrix}$$

$$S\alpha'\beta'\gamma' = -\begin{vmatrix} X & Y & Z\\ X' & Y' & Z'\\ X'' & Y'' & Z''\end{vmatrix}$$

et le second déterminant est égal au premier multiplié par Δ. L'identité (2) se trouve ainsi vérifiée.

3. Soient q, r, deux quaternions et ρ, σ deux vecteurs; on a:

$$S\sigma Vq\rho r = S\rho Vr\sigma q\ . \tag{3}$$

En effet,

$$Vq\rho r = q\rho r - S.q\rho r\ ,$$

donc

$$S\sigma Vq\rho r = S\sigma q\rho r - S\sigma Sq\rho r\ ,$$

mais $\sigma Sq\rho r$ est un vecteur, donc le dernier terme de l'égalité précédente est nul et l'on a simplement:

$$S\sigma Vq\rho r = S\sigma q\rho r = S\rho r\sigma q = S\rho Vr\sigma q\ .$$

4. Considérons maintenant un nombre quelconque de couples de quaternions q_1, r_1,; q_2, r_2;... et posons

$$\varphi(\rho) = \Sigma Vq\rho r = Vq_1\rho_1 r_1 + Vq_2\rho_2 r_2 + \cdots \tag{4}$$

φ (ρ) est évidemment un vecteur. La formule (3) s'applique à chacun des termes de la somme précédente, d'où il suit que

$$S\sigma\Sigma Vq\rho r = S\rho\Sigma Vr\sigma q \ .$$

Si l'on pose

$$\varphi'(\sigma) = \Sigma Vr\sigma q \ .$$

on a

$$S\sigma\varphi(\rho) = S\rho\varphi'(\sigma) \ . \tag{5}$$

On dit que les fonctions φ et φ' sont conjuguées.

5. Si l'on pose

$$\varphi_1 = \varphi + h \ ,$$

h désignant un scalaire quelconque, il faut entendre par là que, par exemple

$$\varphi_1(\rho) = \varphi(\rho) + h\rho \ ;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} S\sigma\varphi_1(\rho) &= S[\sigma\Sigma Vq\rho r + h\sigma\rho] \ , \\ &= S[\sigma\Sigma Vr\sigma q + h\rho\sigma] \ , \end{aligned}$$

car

$$S\sigma\rho = S\rho\sigma \ ;$$

en d'autres termes:

$$S\sigma\varphi_1(\rho) = S.\rho\left\{\Sigma Vr\sigma q + h\sigma\right\} \ .$$

Si l'on pose

$$\varphi_1' = \varphi_1 + h \ ,$$

ce qui donne

$$\varphi_1'(\sigma) = \varphi_1(\sigma) + h\sigma \ ,$$

on peut écrire:

$$S\sigma\varphi_1(\rho) = S\rho\varphi_1'(\sigma) \ .$$

Problème. — Déterminer le vecteur inconnu ρ tel que

$$\Sigma Vq\rho r = \gamma \ , \tag{6}$$

ou (4)

$$\varphi(\rho) = \gamma \ ,$$

γ étant un vecteur donné.

Le problème posé est possible en général. En se donnant les expressions des quaternions q, q_1 ... et du vecteur γ et posant $\rho = ix + jy + kz$, on obtiendra une équation du premier degré en x, y, z qui se décomposera en un système de trois équations en x, y, z que l'on pourra résoudre par les formules de Cramer, Hamilton a donné une solution très élégante, que nous allons développer.

Remarquons en premier lieu, qu'étant donné un vecteur γ on peut, et cela d'une infinité de manières, déterminer deux vecteurs λ, μ perpendiculaires à γ et tels que

$$V\lambda\mu = \gamma \; .$$

En effet, considérons un trièdre trirectangle OXYZ; supposons que l'axe OZ porte le vecteur γ; prenons un vecteur λ dirigé suivant OX et un vecteur μ dans le plan XOY. Soient I, J, K, les vecteurs-unités dirigés suivant OX, OY, OZ respectivement. Si le trièdre est orienté convenablement, on aura

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1 \qquad IJ = K \ldots \quad \text{etc.}$$

Alors, soient

$$\lambda = xI \; , \quad \mu = x'I + y'J \; , \quad \gamma = z''K \; ,$$

il en résulte

$$V\lambda\mu = xy'K \; ,$$

il suffit donc de poser $xy' = z''$ pour que $V\lambda\mu = \gamma$.

Cela étant, on pose

$$\varphi(\rho) = V\lambda\mu \; ,$$

d'où

$$S\lambda\varphi(\rho) = S\lambda V\lambda\mu = S\lambda(\lambda\mu - S\lambda\mu)$$

or

$$\lambda(\lambda\mu - S\lambda\mu) = \lambda^2\mu - \lambda S\lambda\mu \; ,$$

Or $\lambda^2\mu$ et $\lambda S\lambda\mu$ sont des vecteurs.

On a donc

$$S\lambda\varphi(\rho) = 0 \; ,$$

et de même

$$S\mu\varphi(\rho) = 0 \; .$$

Mais

$$S\lambda\varphi(\rho) = S\rho\varphi'(\lambda) \ , \quad S\mu\varphi(\rho) = S\rho\varphi'(\mu) \ ,$$

donc

$$S\rho\varphi'(\lambda) = 0 \ , \qquad S\rho\varphi'(\mu) = 0 \ ,$$

ce qui prouve que le vecteur ρ est perpendiculaire aux deux vecteurs $\varphi'(\lambda)$, $\varphi'(\mu)$ et par suite

$$m\rho = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) \tag{7}$$

m désignant un scalaire.

Si l'on sait résoudre l'équation (6), on en tirera $\rho = \psi(\gamma)$. On peut donc définir ψ comme étant la fonction inverse de φ et poser $\psi = \varphi^{-1}$, ce qui permet d'écrire l'équation (7) de cette façon:

$$m\varphi^{-1}(\gamma) = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) \ ,$$

ou encore

$$m\varphi^{-1}(V\lambda\mu) = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) \ . \tag{7'}$$

7. *Calcul du scalaire m.* — De (7) on tire

$$m\varphi'(\nu)\rho = \varphi'(\nu)V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)$$

en désignant par ν un vecteur non coplanaire avec λ et μ.

Le second membre peut s'écrire ainsi:

$$\varphi'(\nu)\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) - \varphi'(\nu)S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)$$

Ce second terme est un vecteur, donc en égalant les scalaires des deux membres de l'équation précédente, on a:

$$mS\varphi'(\nu)\rho = S\varphi'(\nu)\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) = S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu)$$

D'autre part,

$$S\varphi'(\nu)\rho = S\rho\varphi'(\nu) = S\nu\varphi(\rho) = S\nu V\lambda\mu \ ,$$

donc,

$$S\varphi'(\nu)\rho = S\lambda\mu\nu \ ,$$

ce qui donne

$$m = \frac{S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu)}{S\lambda\mu\nu} \ .$$

Il s'agit de prouver que m est un invariant. Remplaçons le trièdre λ, μ, ν par un autre λ', μ', ν' de façon que

$$\begin{aligned} \lambda' &= a\lambda + b\mu + c\nu \\ \mu' &= a'\lambda + b'\mu + c'\nu \\ \nu' &= a''\lambda + b''\mu + c''\nu \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

on a (2)

$$S\lambda'\mu'\nu' = S\lambda\mu\nu x \Delta \, .$$

d'autre part:

$$\varphi'(\lambda') = \Sigma V r(a\lambda + b\mu + c\nu) \, , = a\Sigma V r\lambda q + b\Sigma V r\mu q + c\Sigma V r\nu q \, ,$$

c'est-à-dire

$$\varphi'(\lambda') = a\varphi'(\lambda) + b\varphi'(\mu) + c\varphi'(\nu) \, ,$$

et de même:

$$\begin{aligned} \varphi'(\mu') &= a'\varphi'(\lambda) + b'\varphi'(\mu) + c'\varphi'(\nu) \, , \\ \varphi'(\nu') &= a''\varphi'(\lambda) + b''\varphi''(\mu) + c''\varphi'(\nu) \, , \end{aligned}$$

et ces formules restent vraies si l'on remplace φ par φ_1. On a donc aussi

$$S\varphi'(\lambda')\varphi'(\mu')\varphi'(\nu') = S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu) \times \Delta \, ,$$

donc m ne change pas

On peut profiter de cette remarque pour avoir un calcul plus simple: à cet effet, on peut remplacer λ, μ, ν par i, j, k et l'on en déduit

$$m = - S\varphi'(i)\varphi'(j)\varphi'(k)$$

et en remplaçant m par cette expression dans (7) on a la solution du problème proposé.

8. Hamilton a obtenu une formule débarrassée des vecteurs λ, μ, ν.

Remplaçons φ par $\varphi + h$. Comme nous l'avons expliqué au No 5, ce qui signifie que nous remplaçons $\varphi(\rho)$ par $\varphi_1(\rho)$ ou $\varphi(\rho) + h\rho$. Supposons encore $\varphi_1(\rho) = \gamma = V\lambda\,\mu$, λ et μ n'étant pas nécessairement les mêmes que plus haut. En procédant comme au n° précédent, nous obtiendrons :

$$m_h\rho = V\varphi_1'(\lambda)\varphi_1'(\mu)$$

m_h désignant ce qu'est devenu le scalaire m après ce changement. On aura d'ailleurs

$$m_h = \frac{S\varphi_1'(\lambda)\varphi_1'(\mu)\varphi_1'(\nu)}{S\lambda\mu\nu}.$$

et, quel que soit h, m_h reste invariable quand on remplace λ, μ, ν par λ', μ', ν' comme plus haut,

On a donc

$$m_h = \frac{S(\varphi'(\lambda) + h\lambda)(\varphi'(\mu) + h\mu)(\varphi'(\nu) + h\nu)}{S\lambda\mu\nu},$$

c'est-à-dire

$$m_h = m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3 ,$$

où m, m_1, m_2 sont des invariants, puisque m_h est invariant, quel que soit h.

D'ailleurs

$$m_1 = \frac{S(\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\nu + \varphi'(\lambda)\mu\varphi'(\nu) + \lambda\varphi'(\mu)\nu)}{S\lambda\mu\nu}$$

$$m_2 = \frac{S(\lambda\mu\varphi'(\nu) + \varphi'(\lambda)\mu\nu + \lambda\varphi'(\mu)\nu)}{S\lambda\mu\nu}$$

et dans ces formules, on pourrait remplacer λ, μ, ν, par i, j, k.

Cela étant, la formule

$$m_h\rho = V\varphi_1'(\lambda)\varphi_1'(\mu)$$

développée, donne

$$m_h\rho = V(\varphi'(\lambda) + h\lambda)(\varphi'(\mu) + h\mu) ,$$

c'est-à-dire:

$$m_h\rho = V[\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) + h(\varphi'(\lambda)\mu + \lambda\varphi'(\mu)) + h^2\lambda\mu]$$

mais

$$V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) = m\rho = m\varphi^{-1}(\gamma) ,$$

$$V\lambda\mu = \gamma .$$

Posons

$$V[\varphi'(\lambda)\mu + \lambda\varphi'(\mu)] = X .$$

ce qui nous permet d'écrire

$$m_h\rho = m\varphi^{-1}(\gamma) + hX + h^2\gamma .$$

Multiplions les deux membres, à gauche, par φ_1 ou $\varphi + h$, ce qui nous donne dans le premier membre:

$$m_h \varphi_1(\rho) \qquad \text{ou} \qquad m_h \gamma ,$$

c'est-à-dire:

$$(m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3)\gamma .$$

Calculons ce que devient le second membre.

Le premier terme devient:

$$m(\varphi + h)\varphi^{-1}(\gamma) ,$$

ce qui signifie

$$m\varphi(\varphi^{-1}(\gamma)) + mh\varphi^{-1}(\gamma) ,$$

ou, plus simplement:

$$m\gamma + mh\varphi^{-1}(\gamma) .$$

Le second terme donne:

$$h(\varphi + h)X \qquad \text{ou} \qquad h\varphi(X) + h^2 X ,$$

enfin, le troisième terme devient:

$$(\varphi + h)h^2\gamma = h^2\varphi(\gamma) + h^3\gamma .$$

On a ainsi:

$$(m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3)\gamma \equiv (m + h^3)\gamma + h(m\varphi^{-1}(\gamma) + \varphi(X) \\ + h^2[X + \varphi(\gamma)] .$$

Si l'on égale les coefficients de h^2, on trouve

$$m_2\gamma = X + \varphi(\gamma) .$$

Donc, X est une fonction linéaire de γ et l'on peut poser

$$X = \psi(\gamma) = m_2\gamma - \varphi(\gamma)$$

ou, symboliquement:

$$\psi(\gamma) = (m_2 - \varphi)\gamma ,$$

ou encore $\psi = m_2 - \varphi$.

Egalons maintenant les coefficients de h; nous aurons

$$m_1 = m\varphi^{-1} + \varphi(\psi) .$$

ou

$$m_1 = m\varphi^{-1} + \varphi(m_2 - \varphi) ,$$

Ce qui donne enfin:

$$m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2 \ ,$$

ou, sous forme plus explicite:

$$m\bar{\varphi}'(\gamma) = m_1\gamma - m_2\varphi(\gamma) + \varphi(\varphi(\gamma)) \ . \tag{8}$$

Telle est la formule d'Hamilton.

Application et vérification.

Exemple. — Déterminer ρ par la condition

$$V\alpha\rho\beta = \gamma$$

α, β, γ étant des vecteurs.

Dans ce cas:

$$\varphi(\rho) = V\alpha\rho\beta = \alpha S\beta\rho - \rho S\alpha\beta + \beta S\alpha\rho = V\beta\rho\alpha$$

donc

$$\varphi'(\rho) = \varphi(\rho) \ .$$

Par suite:

$$\varphi'(\lambda) = V\alpha\lambda\beta \ , \qquad \varphi'(\mu) = V\alpha\mu\beta \ , \qquad \varphi'(\gamma) = V\alpha\nu\beta \ .$$

Pour calculer m nous remplacerons λ, μ, ν par α, β, γ respectivement.

Alors:

$$\begin{array}{lll} V\alpha\lambda\beta & \text{devient} & V\alpha^2\beta = \alpha^2\beta \\ V\alpha\mu\beta & \text{devient} & V\alpha\beta^2 = \alpha\beta^2 \\ V\alpha\nu\beta & \text{devient} & V\alpha\gamma\beta \ . \end{array}$$

Le numérateur de m devient donc:

$$S\alpha^2\beta \,.\, \alpha\beta^2 V\alpha\gamma\beta \ ,$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2\beta^2 S\beta\alpha V\alpha\gamma\beta \ .$$

Or,

$$\beta\alpha V\alpha\gamma\beta = \beta\alpha(\alpha S\gamma\beta - \gamma S\alpha\beta + \beta S\alpha\gamma) \ ,$$

$\alpha^2\beta S\gamma\beta$ et $\beta^2\alpha S\alpha\gamma$ sont des vecteurs. Il reste

$$-\alpha^2\beta^2 S\beta\alpha\gamma S\alpha\beta$$

ou

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma \ ;$$

le dénominateur devenant $S\alpha\beta\gamma$, on a finalement

$$m = \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta$$

et, par suite

$$\rho . \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = V\varphi(\lambda)\varphi(\mu) .$$

Pour appliquer la dernière formule d'Hamilton, calculons m_1 et m_2.

En remplaçant λ, μ, ν par α, β, γ on a:

$$m_1 = \frac{S[\alpha\varphi(\beta)\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\beta\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\gamma]}{S\alpha\beta\gamma} .$$

Nous savons déjà que

$$\rho(\alpha) = \alpha^2\beta , \qquad \varphi(\beta) = \alpha\beta^2 , \qquad \varphi(\gamma) = V\alpha\gamma\beta$$

en faisant les substitutions, le numérateur devient

$$S[2\alpha^2\beta^2 V\alpha\gamma\beta + \alpha\beta^2\gamma] = S\alpha^2\beta^2\beta\alpha\gamma = - \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta\gamma$$

donc $m_1 = - \alpha^2\beta^2$,

Ensuite,

$$m_2 = \frac{S[\alpha\beta\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\beta\gamma + \alpha\rho(\beta)\gamma]}{S\alpha\beta\gamma} .$$

Le numérateur se réduit à $S\alpha\beta V\alpha\gamma\beta$ et, en remplaçant $V\alpha\gamma\beta$ par $\alpha S\gamma\beta - \gamma S\alpha\beta + \beta S\gamma$ on obtient simplement

$$- S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma ,$$

d'où

$$m_2 = - S\alpha\beta .$$

La formule (8) donne

$$\rho . \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = - \alpha^2\beta^2\gamma + S\alpha\beta . V\alpha\gamma\beta + V(\alpha . V\alpha\gamma\beta . \beta) .$$

Mais,

$$\alpha V\alpha\gamma\beta . \beta = \alpha^2\beta S\beta\gamma - \alpha\gamma\beta S\alpha\beta + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma$$

et par suite

$$V(\alpha V\alpha\gamma\beta . \beta) = \alpha^2\beta S\beta\gamma - V\alpha\gamma\beta S\alpha\beta + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma ,$$

ce qui permet d'écrire

$$\rho . \alpha^2\beta^2 S\alpha\beta = - \alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\beta S\beta\gamma + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma$$

et enfin, en divisant les deux membres par $\alpha^2\beta^2$:

$$\rho S\alpha\beta = - \gamma + \alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma .$$

Cette équation peut être obtenue directement. En effet, de l'équation donnée:

$$V\alpha\rho\beta = \gamma ,$$

on tire

$$S\alpha V\alpha\rho\beta = S\alpha\gamma ,$$

ou

$$S.\alpha(\alpha\rho\beta - S\alpha\rho\beta) = S\alpha\gamma$$

$\alpha S\alpha\rho\beta$ étant un vecteur, on a simplement

$$\alpha^2 S\rho\beta = S\alpha\gamma ,$$

ou

$$\alpha S\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma ,$$

de même

$$\beta S\rho\alpha = \beta^{-1} S\beta\gamma ,$$

ce qui donne

$$\gamma = V\alpha\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma - \rho S\alpha\beta$$

et l'on retrouve bien l'équation obtenue en appliquant la formule d'Hamilton.

TROUVER UNE COURBE DONT LA COURBURE ET LA TORSION RELATIVES A CHAQUE POINT AIENT UN RAPPORT CONSTANT

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Soit $\rho = f(s)$ l'équation de la courbe cherchée, s désignant l'arc. Nous représenterons la courbure et la torsion en un point M par les lettres c et c_1. On trouve aisément

$$S\rho'\rho'' = 0 , \qquad T\rho' = 1 , \qquad T\rho'' = c ,$$

et

$$\rho'\rho'' = c\alpha , \tag{1}$$