XIII. — Analogies. — Groupes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Au point de vue analytique, les symétries ne sont que des symétries de déterminants. Le « Calcul tensoriel » ou le « Calcul différentiel absolu » peuvent n'être considérés que comme des prolongements, exceptionnellement heureux toutefois, de la théorie des déterminants fonctionnels.

Remarquons encore que (49) est un cas particulier de (48). En effet

$$G_\sigma^\nu = g^{\nu\alpha} G_{\sigma\alpha} , \qquad G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} .$$

Donc (49) coïncide avec (48) à second membre nul.

XIII. — Analogies. — Groupes.

Nous revenons ici, avec une extrême brièveté, sur les fondements de la Théorie des Groupes continus due à Sophus Lie. Le but est de montrer les analogies entre l'analyse de Lie et l'analyse précédente. Nous reprenons les échelons des démonstrations fondamentales en sautant de l'un à l'autre sans démonstrations développées; pour celles-ci le mieux serait de se reporter aux excellentes *Lezioni* de Luigi Bianchi.

1. — Soient les formules de transformation

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n ; \quad a_1, a_2, \dots, a_r) . \tag{51}$$

Leur itération donne

$$x_i'' = f_i(x_1', x_2', \dots, x_n' ; \quad b_1, b_2, \dots, b_r) \tag{52}$$

ou bien, *si ces formules donnent naissance à un groupe*,

$$x_i'' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n ; \quad c_1, c_2, \dots, c_r) . \tag{53}$$

Montrons d'abord qu'il existe de certaines fonctions F des x' et des a restant constantes, c'est-à-dire donnant

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = 0 .$$

en vertu d'équations différentielles à former.

Soient α_{jk} $(a_1, a_2, ..., a_r)$ ou, plus brièvement, α_{jk} (a), des fonctions, en nombre r^2, formant un déterminant α. On voit déjà que ces fonctions sont comparables aux g_{jk} des ds^2 einsteiniens, le déterminant α étant comparable à g.

Formons

$$\alpha_{jk}\frac{\partial F}{\partial a_k} + \alpha_{jk}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}\frac{\partial F}{\partial x'_i} = 0 ,$$

ce que l'on conviendra d'écrire

$$Y_j(F) = A_j(F) + X'_j(F) = 0 , \tag{54}$$

en posant

$$A_j(F) = \alpha_{jk}\frac{\partial F}{\partial a_k} , \quad X'_j(F) = \xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i} , \quad \xi_{ji}(x') = \alpha_{jk}\frac{\partial x'_i}{\partial a_k} . \tag{55}$$

Cette dernière équation donne enfin

$$\frac{\partial x'_i}{\partial a_l} = \alpha^{jl}\xi_{ji}(x') . \tag{56}$$

Cette formule représente le *premier système fondamental* de Lie; il s'intègre avec n constantes arbitraires $x_1, x_2, ..., x_n$. Le raisonnement fait déjà apparaître, en (55), deux systèmes de *transformations infinitésimales.*

2. — Les équations (54), étant vérifiables, forment un *système complet.* C'est dire que

$$(Y_j , Y_k) = Y_j Y_k - Y_k Y_j = c_{jks} Y_s .$$

Les choses étant disposées pour que les A ne dépendent que des a et les X' que des x', nos dernières équations doivent se scinder en

$$(A_j , A_k) = c_{jks} A_s , \quad (X'_j , X'_k) = c_{jks} X'_s , \tag{57}$$

les c_{jks} ne dépendant pas des x' dans la première de ces relations et ne dépendant pas des a dans la seconde. Il s'ensuit que ces c_{jks} ne peuvent être que de simples constantes numériques; ce sont les *constantes de structure.*

3. — Aux $\alpha_{ik}(a)$ adjoignons des $\alpha_{ik}(b)$ et des $\alpha_{ik}(c)$. Le système

$$\alpha_{ik}(b) \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \alpha_{i\lambda}(c) \frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0$$

est encore *complet*, de par la première équation (57). Multipliant par $\alpha^{sk}(b)$, on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \alpha^{sk}(b)\, \alpha_{s\lambda}(c) \frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0 \ ,$$

d'où

$$\frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \alpha^{sk}(b)\, \alpha_{s\lambda}(c) \ . \tag{58}$$

C'est là un système du type (56); il peut être intégré par des formules telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} c_i = c_i(a_1, a_2, \ldots, a_r \ ; \quad b_1, b_2, \ldots, b_r) \ , \\ a_i = c_i(a_1, a_2, \ldots, a_r \ ; \quad a^0_1, a^0_2, \ldots, a^0_r) \ . \end{array} \right.$$

Enfin

$$\frac{\partial x''_i}{\partial b_k} = \frac{\partial x''_i}{\partial c_\lambda} \frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \alpha^{t\lambda}(c)\, \xi_{ti}(x'')\, \alpha^{sk}(b)\, \alpha_{s\lambda}(c) = \xi_{si}(x'')\, \alpha^{sk}(b) \ .$$

C'est encore un système du type (56) correspondant, cette fois, à l'équation (52); celle-ci doit bien contenir les x' puisque (53), pour $b_k = a^0_k$ d'où $c_k = a_k$, donne $x'' = x'$ d'après (51).

On peut déjà conclure que la co-existence des formules (51), (52), (53) est assurée par celle des formules (56) et (57).

4. — Les trois paragraphes précédents représentent, en somme, les trois théorèmes fondamentaux de Lie.

Un perfectionnement important fut obtenu par Maurer qui montra que les α^{ik} pouvaient être isolés en des équations différentielles spéciales.

La première équation (57) développée donne

$$\alpha_{jm} \frac{\partial \alpha_{kn}}{\partial a_m} - \alpha_{km} \frac{\partial \alpha_{jn}}{\partial a_m} = c_{jks}\, \alpha_{sn} \ .$$

Multipliant par α^{tn} on peut écrire ensuite

$$\alpha_{jm}\alpha_{kn}\left(\frac{\partial\alpha^{tm}}{\partial a_n} - \frac{\partial\alpha^{tn}}{\partial a_m}\right) = c_{jkt} \, .$$

Multipliant par $\alpha^{k\mu}\ \alpha^{j\nu}$, il vient

$$\frac{\partial\alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial\alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu} = c_{jkt}\alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu} \, . \tag{59}$$

Telles sont les *équations de Maurer*.

La formule de Stokes, prise sous la forme

$$\int_C \alpha^{t\lambda} da_\lambda = \frac{1}{2}\int\!\!\int_S \left(\frac{\partial\alpha^{t\nu}}{\partial a_\mu} - \frac{\partial\alpha^{t\mu}}{\partial a_\nu}\right) da_\mu da_\nu \, ,$$

les transforme en

$$\int_C \alpha^{t\lambda} da_\lambda = \frac{1}{2} c_{jkt}\int\!\!\int_S \alpha^{k\mu}\alpha^{j\nu} da_\mu da_\nu \, . \tag{60}$$

On peut montrer, comme l'a fait Schur, que l'intégration des équations de Maurer se ramène à celle d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, c'est-à-dire uniquement à des opérations *algébriques*. Nous n'insisterons pas davantage; remarquons seulement que notre brève esquisse appuie la théorie générale sur la construction préliminaire du *groupe paramétrique*, groupe défini par la première équation (57).

Rappelons cependant l'*identité de Jacobi*, entre opérateurs X( ),

$$\begin{vmatrix} X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \\ X_i & X_j & X_k \end{vmatrix} = 0 \, , \qquad \text{d'où} \qquad \begin{vmatrix} c_{si\tau} & c_{sj\tau} & c_{sk\tau} \\ c_{i\omega s} & c_{j\omega s} & c_{k\omega s} \\ i & j & k \end{vmatrix} = 0 \tag{61}$$

si l'on tient compte de la seconde équation (57) pour des mineurs tels que

$$X_j X_k - X_k X_j = (X_j, X_k) \, .$$

En outre on voit aisément, par exemple à l'aide de (59), que

$$c_{jkt} + c_{kjt} = 0 \, . \tag{62}$$

5. — Il est facile maintenant d'indiquer les remarquables analogies offertes par l'analyse des théories einsteiniennes d'une part, par l'analyse de la théorie des groupes de Lie d'autre part. On pourrait d'ailleurs les développer bien davantage. Contentons-nous, pour l'instant, de remarquer que dans les Théories de :

Lie	*Einstein*

Deux formes différentielles, l'une linéaire, l'autre bilinéaire, jouent un rôle fondamental.

Lie	Einstein
Ce sont les deux formes engagées sous les intégrales dans l'équation (60).	Ce sont : $P_i \, dx_i \, , \quad M_{ij} \, dx_i \, dx_j \, .$ (4)

Les formules stokiennes interviennent à la base des deux théories.

Ces deux théories ont des opérateurs de dérivation plus généraux que les dérivées partielles ordinaires et, en général, non permutables.

Lie	Einstein
Ce sont les transformations infinitésimales $A_j(F) \, , \quad X_j(F) \, .$ (55)	Ce sont les dérivées en D conformes à l'équation schématique du début du paragraphe X.

Il y a des égalités, se construisant à l'aide de déterminants symboliques, qui, d'une théorie à l'autre, se comparent aisément.

Lie	Einstein
Telle est l'identité de Jacobi avec sa conséquence (61). Voir aussi (62).	Telle est l'identité de Bianchi (40). Voir aussi (39).

Signalons encore que, dans ses *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto* (pp. 289-295), M. T. Levi-Civita étudie des « dérivées d'arcs » dont la permutabilité est de même nature que celle d'opérateurs X.

Il y a même là une véritable correspondance entre opérateurs D et opérateurs X.

Dans le même ordre d'idées la Théorie des Groupes, de par ses applications géométriques, se combine tout naturellement avec la Théorie des variétés à ds^2 donné; plusieurs chapitres de Lie et de Bianchi en font foi très simplement.

Enfin, après avoir rapproché Lie et Einstein, il est presque impossible de ne pas dire quelques mots de l'admirable conférence faite au Congrès de Toronto par M. Elie CARTAN, conférence reproduite par *L'Enseignement mathématique* en tête du présent volume. Ici nous venons seulement de rapprocher les bases analytiques des deux théories. Envisager le jeu des groupes dans les espaces généralisés est une autre question ; cependant, comme le montre M. Cartan, ce jeu n'est souvent possible que grâce au parallélisme généralisé de M. Levi-Civita et, comme nous l'avons montré, ce parallélisme apparaît immédiatement avec les toutes premières propriétés déduites de nos identités fondamentales (1). Ces identités, nous y reviendrons plus loin (§ 15), peuvent être considérées à un point de vue purement analytique ou comme attachées à des volumes ou aires de l'espace euclidien. C'est donc l'étude approfondie de l'espace euclidien qui peut inciter à envisager des espaces différents ; de même le seul usage du symbole analytique permet de créer *logiquement* espaces et groupes.

XIV. — FORMULES ANTISTOKIENNES. — EQUATIONS CANONIQUES.

Abordons maintenant les analogies des Théories einsteiniennes et des Théories dynamiques classiques. Le sujet possède déjà de nombreux développements faits à différents points de vue. Ici nous voulons simplement faire naître les équations canoniques de Jacobi-Hamilton de considérations analogues à celles sur lesquelles repose l'analyse einsteinienne.

Soient les deux types de matrices

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial x_3} & \cdots \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_3} & \cdots \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial A}{\partial x_j} & \dfrac{\partial B}{\partial x_j} & \dfrac{\partial C}{\partial x_j} & \cdots \\ \dfrac{\partial A}{\partial y_j} & \dfrac{\partial B}{\partial y_j} & \dfrac{\partial C}{\partial y_j} & \cdots \end{matrix} \quad . \qquad (63)$$

Le premier type suppose au moins deux fonctions et un nombre quelconque de variables ; c'est le type déterminant fonctionnel ou type *stokien* qui joue le rôle fondamental en Analyse einsteinienne. Le second type (63) suppose un nombre quelconque