XII. — Equations gravifiques générales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

On conclut de là, d'après la dernière identité (43),

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} . \tag{45}$$

L'expression

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

donne, d'après ce que nous avons vu (§ VI) pour toutes les expressions de même nature,

$$G_\sigma = \frac{DG}{Dx_\sigma} = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \tag{46}$$

On sait que G est la *courbure scalaire* pour l'espace dont le ds^2 est

$$ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j .$$

Dans le cas d'une surface ordinaire, G se réduit à la courbure totale.

XII. — Equations gravifiques générales.

Reprenons l'identité de Bianchi, sous la forme (38), et *contractons* la en faisant τ égal à ρ; il vient

$$\left(B^{\varrho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\varrho + G_{\mu\sigma\nu} - G_{\mu\nu\sigma} = 0 .$$

On conclut de là

$$g^{\mu\nu}\left(B^{\varrho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\varrho = \left(g^{\mu\nu} B^{\varrho}_{\mu\nu\sigma}\right)_\varrho = \left(g^{\mu\nu} g^{\varrho\tau} B_{\mu\nu\sigma\tau}\right)_\varrho$$

$$= \left(g^{\varrho\tau} g^{\mu\nu} B_{\tau\sigma\nu\mu}\right)_\varrho = \left(g^{\varrho\tau} B^{\nu}_{\tau\sigma\nu}\right)_\varrho = \left(g^{\varrho\tau} G_{\tau\sigma}\right)_\varrho = G^{\varrho}_{\sigma\varrho} .$$

De même

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma\nu} = \left(g^{\mu\nu} G_{\mu\sigma}\right)_\nu = G^{\nu}_{\sigma\nu} ,$$

$$g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\sigma} = \left(g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}\right)_\sigma = G_\sigma .$$

Donc, en tenant compte de (46),

$$2G^{\nu}_{\sigma\nu} = \frac{\partial G}{\partial x_\sigma} . \tag{47}$$

Telle est l'identité fondamentale de la Mécanique einsteinienne; au fond ce n'est que l'identité de Bianchi *contractée*. Le raisonnement ici employé est encore emprunté à M. A.-E. Harward.

L'identité (47) peut s'écrire

$$\left(G_\sigma^\nu - \frac{1}{2} g_\sigma^\nu G\right)_\nu = 0 \ .$$

L'expression identiquement nulle ainsi formée est une *divergence* généralisée; si, pour raison expérimentale, par exemple, ou, dans une théorie physique quelconque, on se trouve en présence d'une autre divergence $T_{\sigma\nu}^\nu$ nulle, on pourra tenter une théorie phénoménale en posant

$$G_\sigma^\nu - \frac{1}{2} g_\sigma^\nu G \equiv T_\sigma^\nu \ . \tag{48}$$

Telles sont les équations générales d'Einstein. Le signe $\equiv$ indique que l'égalité peut n'avoir lieu qu'à un facteur constant près, facteur pouvant simplement dépendre du choix des unités.

Rappelons que, dans le cas de la matière discontinue (cas astronomique), la loi de gravitation est simplement

$$G_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{49}$$

Il y a là *dix* équations permettant de déterminer les *dix* $g_{\mu\nu}$ d'un ds^2 quadridimensionnel. Les équations (49), d'après la dernière (34), peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ \dfrac{DP^i}{Dx_i} & \dfrac{DP^i}{Dx_j} \end{vmatrix} = 0 \ , \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ \dfrac{DP^j}{Dx_i} & \dfrac{DP^j}{Dx_j} \end{vmatrix} = 0 \ , \tag{50}$$

qui doivent avoir lieu quel que soit le vecteur P. Ces deux formes n'en font qu'une mais si l'on n'en écrivait qu'une on pourrait croire, à tort, que la loi de gravitation n'est pas parfaitement symétrique.

Que l'on revienne maintenant aux équations générales de l'électromagnétisme, déduites (§ I) du déterminant Δ_2, à la loi de gravitation exprimée en (50), aux équations générales (48) déduites de l'identité de Bianchi (40) et l'on pourra admirer la synthèse einsteinienne en ses résultats les plus symétriques et les plus élémentaires.

Au point de vue analytique, les symétries ne sont que des symétries de déterminants. Le « Calcul tensoriel » ou le « Calcul différentiel absolu » peuvent n'être considérés que comme des prolongements, exceptionnellement heureux toutefois, de la théorie des déterminants fonctionnels.

Remarquons encore que (49) est un cas particulier de (48). En effet

$$G_\sigma^\nu = g^{\nu\alpha} G_{\sigma\alpha}, \qquad G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}.$$

Donc (49) coïncide avec (48) à second membre nul.

XIII. — Analogies. — Groupes.

Nous revenons ici, avec une extrême brièveté, sur les fondements de la Théorie des Groupes continus due à Sophus Lie. Le but est de montrer les analogies entre l'analyse de Lie et l'analyse précédente. Nous reprenons les échelons des démonstrations fondamentales en sautant de l'un à l'autre sans démonstrations développées; pour celles-ci le mieux serait de se reporter aux excellentes *Lezioni* de Luigi Bianchi.

1. — Soient les formules de transformation

$$x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n;\ a_1, a_2, \dots, a_r). \tag{51}$$

Leur itération donne

$$x_i'' = f_i(x_1', x_2', \dots, x_n';\ b_1, b_2, \dots, b_r) \tag{52}$$

ou bien, *si ces formules donnent naissance à un groupe*,

$$x_i'' = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n;\ c_1, c_2, \dots, c_r). \tag{53}$$

Montrons d'abord qu'il existe de certaines fonctions F des x' et des a restant constantes, c'est-à-dire donnant

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = 0.$$

en vertu d'équations différentielles à former.