PROPOS DE L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DU SCRUTIN

Autor(en): **Mirimanoff, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19739

A PROPOS DE L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DU SCRUTIN

PAR

D. Mirimanoff (Genève).

Il me semble qu'il ne serait pas inutile de montrer en quoi la solution que donne M. Aebly dans la Note ci-dessus se distingue de celle de D. André que Bertrand, Poincaré et M. Czuber ont reproduite dans leurs traités.

On sait que le raisonnement d'André repose sur le lemme suivant: le nombre des suites défavorables commençant par A est égal à celui des suites commençant par B. M. Aebly a réussi à simplifier la démonstration de ce lemme en introduisant un mode de correspondance particulier, qui lui a été suggéré par son interprétation géométrique du problème. Au lieu de fractionner le segment pour lequel l'égalité des suffrages se produit pour la première fois et de transporter la partie enlevée à l'autre bout de la suite, M. Aebly remplace le segment par son symétrique qu'on obtient en appliquant aux lettres du segment la transposition (A, B).

Prenons, par exemple, la suite

AABABBABAA

envisagée par Poincaré.

Le segment pour lequel l'égalité des suffrages se produit pour la première fois est formé des six premières lettres AABABB.

Dans la solution d'André, ce segment est fractionné en deux: on laisse la dernière lettre à sa place et l'on transporte les cinq premières du côté droit, ce qui fournit la suite

BABAAAABAB

M. Aebly se borne à appliquer aux lettres du segment la transposition (A, B); la suite associée s'écrit

BBABAAABAA

Et réciproquement on passe d'une suite commençant par B à une suite défavorable commençant par A en appliquant aux lettres du premier segment à suffrages égaux la même transposition (A, B). On voit immédiatement que cette correspondance est biunivoque et réciproque.

Je passe à l'interprétation géométrique du problème du scrutin qui consiste à représenter les différentes suites par des chemins parcourus sur un échiquier rectangulaire. Peut-être y aurait-il quelque intérêt à rapprocher ce problème topologique d'un autre problème assez curieux qui a été mis récemment au concours par une fabrique de porte-plumes à réservoir.

Mais j'aime mieux, avant de terminer, montrer comment la considération de ces chemins peut simplifier la démonstration des propriétés fondamentales des coefficients du binôme.

Partons, avec M. Aebly, de la case (0, 0); désignons par N_{ik} le nombre des chemins qui aboutissent à la case (i, k). On voit immédiatement que $N_{ik} = N_{i-1,k} + N_{i,k-1}$, puisque tout chemin aboutissant à (i, k) passe nécessairement ou bien par la case $(i - 1, k)$ ou bien par la case $(i, k - 1)$. Il en résulte que les N_{ik} sont les nombres du triangle de Pascal, c'est-à-dire les coefficients du binôme. Et d'autre part, la formule des permutations avec répétition donne $N_{ik} = \frac{(i + k)!}{i!\, k!}$. On en tire l'expression classique des coefficients du binôme.

Mais on peut aller plus loin dans cette voie. Considérons les chemins qui aboutissent à une case déterminée (n, m). Chacun de ces chemins traverse la diagonale le long de laquelle la somme $i + k$ des indices $= s$, où s est un nombre donné inférieur à $m + n$.

Par conséquent, $N_{n,m}$ est égal à la somme des nombres des chemins passant par les différentes cases de cette diagonale. Or, le nombre des chemins passant par une case (i, k) et aboutissant à la case finale (n, m) est égal au produit de $N_{i,k}$ par le nombre des chemins partant de (i, k) et aboutissant à (n, m), c'est-à-dire par $N_{n-i,m-k}$. Il en résulte que la somme de ces produits est égal à $N_{n,m}$. En particulier, on obtient de cette manière l'expression de la somme des carrés des coefficients du binôme. Ces formules sont connues, on les trouve, par exemple, dans un livre de P. Bachmann[1]. La démonstration que je viens de donner est-elle nouvelle ? Je ne le crois pas, mais j'ai pensé qu'il n'était pas inutile de l'indiquer.

NOTE DE GÉOMÉTRIE
TRIANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

PAR

A. Amiel (Aix-en-Provence).

I. — On connaît le théorème suivant:

« Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle. Les points de rencontre de chacun des trois côtés avec la tangente au sommet opposé sont en ligne droite. »

Ce théorème peut être généralisé ainsi:

« Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit de centre O, de rayon R. Les rayons aboutissant aux sommets sont orientés de telle sorte que:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = +R \ .$$

Sur chacun de ces rayons prenons des points A_1, B_1, C_1, tels que

$$\overline{OA_1} = \overline{OB_1} = \overline{OC_1} = K \ ,$$

K étant un nombre algébrique quelconque.

En A_1 on mène la perpendiculaire à OA qui coupe le côté opposé au sommet A en A'; en B_1 on mène la perpendiculaire à OB qui

---

[1] P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie*, II, Teubner, 1910, p. 122.