Niels Nielsen. – Traité élémentaire des nombres de Bernoulli. — 1 vol. grand in-8° de X + 399 p.; 50 fr.; Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1923.

Autor(en): **Du Pasquier, L.-Gustave**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

$P < 10^7$. Ces quatre grandes tables constituent la deuxième partie des *Recherches*.

La première partie présente un caractère fragmentaire et contient principalement des compléments à la *Théorie des nombres* du même auteur. Ce sont en effet les mêmes questions qui sont traitées : Identités et généralités (chapitres I et II), Congruences du premier et du second degré (chapitres III et IV), congruences binômes (ch. V) ; factorisation (ch. VI) ; dans le chapitre VII, où les équations binômes sont traitées d'une manière originale, l'exposition revêt un caractère plus systématique. Cette première partie fourmille de tables dont quelques-unes s'étendent sur plusieurs pages. Si l'on ajoute à la seconde partie, qui contient en réalité 11 tables sous forme condensée, les 21 tables éparses dans le texte de la première partie, on arrive au total de 32 tables dressées par M. Kraïtchik lui-même. Il faut y ajouter une foule de renseignements très curieux sur la partition des nombres et une quantité de détails, trop nombreux et trop complexes pour pouvoir être résumés en une courte analyse. On le voit, l'abondance des documents réunis par l'auteur est vraiment imposante, et ces deux livres, qui rendront des services signalés aux arithméticiens, ne devraient manquer dans aucune bibliothèque mathématique.

L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel).

Niels Nielsen. — **Traité élémentaire des nombres de Bernoulli.** — 1 vol. grand in-8° de X+399 p.; 50 fr.; Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1923.

On sait que Jacques Bernoulli, dont le nom est indissolublement lié au Calcul des probabilités par la loi des grands nombres, a introduit dans son fameux ouvrage posthume sur L'Art de conjecturer, *Ars conjectandi*, publié en 1713, une suite infinie de nombres rationnels particuliers devenus célèbres en analyse mathématique. Le grand Euler les a retrouvés à son tour et popularisés sous le nom de nombres de Bernoulli, se servant de l'initiale de ce nom pour les désigner, et sa notation

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \ldots$$

a acquis droit de cité en mathématiques. Une pléiade de mathématiciens, parmi lesquels les plus grands géomètres et calculateurs, les Cauchy, Gauss, Hermite et Kronecker, les Jacobi, Lipschitz, Lucas, de Moivre, les Raabe, Saalschütz, von Staudt, Stern, Sylvester, etc., se sont occupés de ces curieux nombres, de sorte qu'il y a une littérature assez étendue sur ce sujet spécial M. Niels Nielsen de l'Université de Copenhague, à qui l'on doit plusieurs ouvrages importants et de nombreuses monographies sur la Théorie des fonctions, était bien placé pour coordonner ce que l'on sait des nombres de Bernoulli, puisqu'il a mis depuis quelques années sa vaste érudition mathématique plus spécialement au service de la Théorie des nombres. Les 400 pages de son « Traité élémentaire des nombres de Bernoulli » comprennent vingt chapitres, dont les deux premiers sont consacrés à des formules et théorèmes auxiliaires relatifs aux propriétés des fonctions rationnelles entières, à l'indicateur d'Euler $\varphi(n)$ et au calcul des différences finies, notamment aux propriétés des opérations Δ, δ, D, où

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x-1), \quad \delta f(x) = f(x) + f(x-1) \quad \text{et} \quad \mathrm{D} f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

dont M. Nielsen définit et étudie les puissances positives et négatives. Puis il étudie ce qu'il appelle les polynomes « harmoniques »

$$f_n(x) \equiv \frac{a_0 x^n}{n!} + \frac{a_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{a_{n-1} x}{1!} + \frac{a_n}{0!}$$

et les « suites harmoniques » (envisagées pour la première fois, avec une légère modification, par M. P. Appell, en 1880):

$$f_0(x) \;, \quad f_1(x) \;, \quad f_2(x) \;, \dots , \quad f_n(x) \;, \dots \tag{1}$$

Les *fonctions de Bernoulli* $B_0(x)$, $B_1(x)$, ..., $B_\lambda(x)$, ... s'introduisent alors comme éléments d'une suite harmonique particulière satisfaisant à l'équation aux différences finies

$$\Delta B_n(x) \equiv B_n(x) - B_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (n \geqq 1) \tag{2}$$

M. Nielsen en déduit sans difficultés, par voie élémentaire, l'expression générale de $B_n(x)$, et pour les nombres de Bernoulli B_λ la formule de récurrence donnée déjà par Jacques Bernoulli lui-même

$$\frac{p-1}{2} = \sum_{s=1}^{\leqq \frac{1}{2}(p-1)} (-1)^{s-1} \cdot \binom{p+1}{2s} \cdot B_s \tag{3}$$

ainsi que cette autre formule récursive trouvée par Euler:

$$(2p+1) \cdot B_p = \sum_{s=1}^{p-1} \binom{2p}{2s} \cdot B_s \cdot B_{p-s} \tag{4}$$

Au lieu du symbole Δ qui indique formation d'une différence, M. Nielsen prend ensuite le symbole δ qui indique formation d'une somme. Ce sont alors les *fonctions d'Euler*

$$E_0(x) \;, \quad E_1(x) \;, \quad E_2(x) \;, \quad \dots , \quad E_n(x) \;, \quad \dots$$

qui s'introduisent comme éléments d'une suite harmonique particulière (1), satisfaisant à l'équation aux différences finies analogue à (2)

$$\delta E_n(x) \equiv E_n(x) + E_n(x-1) = \frac{x^n}{n!} \quad (n \geqq 0) \tag{5}$$

M. Nielsen en déduit sans difficultés, par voie élémentaire, l'expression générale de $E_n(x)$ et pour les nombres E_λ, appelés *nombres d'Euler*, la formule de récurrence analogue à (3)

$$\sum_{s=0}^{\lambda-1} (-1)^s \cdot \binom{2\lambda}{2s} \cdot E_{\lambda-s} = (-1)^{\lambda-1} \tag{6}$$

due à Euler. Celui-ci a déjà calculé $E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, $E_4 = 1385$, etc. jusqu'à E_9, qui est un nombre de 9 chiffres. A cette occasion s'introduisent les nombres T_n, généralement appelés « coefficients des tangentes », pour lesquels

$$T_{p+1} = \sum_{s=0}^{p-1} \binom{2p}{2s+1} \cdot T_{s+1} \cdot T_{p-s} \quad (p \geqq 1) \tag{7}$$

analogue à la formule de récurrence (4). Ces nombres $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 16$, $T_4 = 272$, etc., croissent aussi rapidement que les nombres d'Euler.

Qu'on veuille bien remarquer le caractère élémentaire de ces déductions.

J'ai donné quelques développements pour faire ressortir la symétrie qu'on peut introduire dans cet exposé, puis aussi pour faire comprendre l'originalité du livre de M. Nielsen. Voici en effet ce qui s'est passé historiquement.

C'est en étudiant le développement des fonctions trigonométriques ctg x, tg x, cosec x en séries de puissances qu'Euler retrouva les nombres de Bernoulli. C'est donc par des considérations transcendantes qu'il démontra plusieurs belles propriétés de ces nombres. Les géomètres, s'inspirant de l'exemple d'Euler, appliquèrent presque exclusivement des méthodes transcendantes dans leurs recherches sur ces nombres rationnels, exceptés von Staudt et von Ettingshausen. De nos jours encore, on a l'habitude de rattacher les nombres de Bernoulli aux fonctions exponentielles ou trigonométriques et de démontrer leurs propriétés par des identités où figurent ces fonctions transcendantes. La formule récursive de Jacques Bernoulli, formule (3) ci-dessus, tomba entièrement dans l'oubli, si bien qu'on attribue à de Moivre et à Jacobi les premières formules récursives pour ces nombres, et pourtant elles ne sont que des cas particuliers de celle de Bernoulli. Frappé de ce fait, M. Nielsen a voulu écrire un traité « élémentaire » où il se passe des fonctions transcendantes, c'est ce qui fait son originalité. A l'aide des notions ci-dessus rappelées et de quelques autres tout aussi élémentaires, M. Nielsen étudie la différence $B_m(x+p) - B_m(x)$ et déduit d'un seul coup 32 formules de récurrence comme cas spéciaux de la formule de Bernoulli. La plupart d'entre elles étaient déjà connues, mais démontrées par des méthodes transcendantes très différentes et compliquées.

M. Nielsen base sa théorie élémentaire sur l'équation fondamentale

$$f(-x-1) = \pm f(x) \ . \tag{8}$$

Il démontre que les fonctions de Bernoulli et d'Euler satisfont à cette équation. Il appelle polynome « symétrique », toute fonction rationnelle entière satisfaisant à (8). La notion de suite « régulière », celle de « fonction partielle » et l'ingénieuse notion de « rang d'un nombre premier » permettent à M. Nielsen d'établir une très grande quantité de relations, dont beaucoup sont nouvelles, entre les B_n, les E_n et les T_n, ou les fonctions correspondantes. Il relève en cours de route plusieurs erreurs de ses prédécesseurs. De nombreuses applications sont faites aux nombres B_n, E_n et T_n eux-mêmes, puis aux sommes S_n des puissances semblables des nombres naturels, ou des racines d'une équation algébrique, puis aux sommes correspondantes σ_n où lesdites puissances semblables sont prises avec des signes alternativement + et —, puis à des équations algébriques de forme particulière, enfin à la Théorie des nombres.

Je regrette de ne pas trouver, dans un livre de cette envergure, des résultats numériques aussi complets que possible. Ainsi, les S_n ont été calculés jusqu'à S_{16} et les nombres de Bernoulli jusqu'à B_{92}, mais M. Nielsen ne donne la liste que jusqu'à S_{10} et B_{16}. Bien que « élémentaire », le Traité de M. Nielsen sur les nombres de Bernoulli conduit le lecteur assez avant dans certaines branches de l'arithnomie, comme l'indique déjà le titre des derniers chapitres.

Le chapitre 13 : « De la nature des nombres de Bernoulli », contient, entre autres, les célèbres théorèmes de von Staudt et de Clausen ; chapitre 14 : « Les congruences de Kummer »; chapitre 17 : « Les coefficients de factorielles » ; chapitre 19 : « Des quotients de Fermat »; chapitre 20 : « Des résidus quadratiques ».

Les indications bibliographiques sont très nombreuses et exactes. Je n'ai relevé que très peu de fautes d'impression, aucune dans les formules. Le lecteur trouve dans le traité lui-même toutes les définitions et tous les théorèmes nécessaires à la compréhension entière du texte. C'est le Traité le plus complet et le meilleur que je connaisse sur les nombres de Bernoulli et les domaines connexes, et il convient d'en féliciter M. Niels Nielsen.

L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel).

R. Marcolongo. — **Relativita**, seconda edizione riveduta ed ampliata. — 1 vol. in-8º de XII+235 p , 30 l.; Casa Editrice Giuseppe Principato, Messina, 1923.

Nous avons déjà dit l'intérêt que présente la première édition de ce livre. Il comprend l'exposé indispensable du calcul différentiel absolu, puis les théories restreinte et générale de la relativité, développées surtout au point de vue de la mécanique ; enfin un appendice consacré à une étude de la géométrie des espaces de Riemann.

Dans la seconde édition, le calcul différentiel absolu est plus développé, une brève allusion à la théorie du déplacement parallèle de M. Levi-Civita a été placée dans l'étude géométrique des variétés de Riemann et le livre se termine par un résumé de la théorie sans développements mathématiques.

Dans la seconde préface, M. Marcolongo nous laisse espérer, malgré un deuil qui l'a vivement affecté, qu'un exposé du problème cosmologique, une étude du champ électro-magnétique et de son interprétation dans les géo métries de MM. Weyl et Eddington sortira de sa plume ; souhaitons vivement qu'il en soit ainsi.

Rolin Wavre (Genève).

R. Marcolongo. — **Meccanica Razionale** Vol. I : cinematica-statica, XV+325 p.; vol. II : dinamica-meccanica dei sistemi deformabili, XII+414 p. Terza edizione; lire 12,50 et 16,50. — Ulrico Hœpli. Milano, 1923.

Ce traité de mécanique rationnelle fait partie de la collection des « Manuels Hœpli », qui comprend, comme on sait, déjà d'excellents traités de mathématiques supérieures, de physique, etc. Le savant professeur de mécanique de l'Université de Naples y donne un exposé très complet, en même temps que très concis, des principaux sujets de la mécanique. Je ne le