# II. – Dérivées en D. — Déplacements parallèles. Géodésiques.

Le mineur

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2M_{ij} .$$

Nous rencontrerons d'autres développements de déterminants à effectuer de manière analogue; l'indice $\omega$ sera dit *indice de substitution.*

Dans le premier membre de (3), l'assemblage d'indices $ij$ conduit à *six* termes en 12, 13, 14, 23, 24, 34. On a toujours

$$M_{ii} = 0 .$$

En résumé, *nous partons des identités* (1) *ou bien*, ce qui n'est pas dire plus mais ce qui est plus explicite, *de deux formes différentielles*

$$\sum P_i dx_i , \qquad \sum M_{ij} dx_i dx_j \tag{4}$$

*l'une linéaire, l'autre bilinéaire.* C'est tout ce dont nous avons besoin, au point de vue des fondements essentiels, pour établir les formules générales de l'électromagnétisme et de la gravifique.

## II. — Dérivées en D. — Déplacements parallèles. Géodésiques.

Fixons notre attention sur les deux dernières lignes du déterminant $\Delta_1$; d'ailleurs ce que nous avons à dire s'appliquerait tout aussi bien aux mineurs à extraire de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{Vmatrix} . \tag{5}$$

Soit l'égalité

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} \\ {}_iP_\alpha & {}_jP_\alpha \end{vmatrix} . \tag{6}$$

Le déterminant en $\partial$ est l'un des mineurs de (5) ; le dernier déterminant, comme on le concevra sans peine, est à développer en

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ji} P_{\alpha} ,$$

ce qui est identiquement nul si

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ji} . \tag{7}$$

Cette hypothèse (7) sera toujours maintenue.

Donc, dans (6), rien ne généralise *le déterminant en* $\partial$; mais ceci n'empêche pas qu'en développant les trois déterminants de (6) on a, par considération des termes homologues et *par définition, des dérivées*, en D, *de composantes vectorielles* $P_j$,

$$\frac{DP_j}{Dx_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} . \tag{8}$$

A la formule (6) on peut immédiatement associer

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\omega}_{i\alpha} & \Gamma^{\omega}_{j\alpha} \\ {}^iP^{\alpha} & {}^jP^{\alpha} \end{vmatrix} \tag{9}$$

d'où, de même et *par définition, des dérivées*, en D, *d'autres composantes* $P^j$,

$$\frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial P^j}{\partial x_i} + \Gamma^{j}_{i\alpha} P^{\alpha} . \tag{10}$$

Cette fois le dernier déterminant de (9) n'est pas nul ce qui est une des raisons qui font distinguer les $P^j$ des $P_j$. Mais (10) va cependant se justifier tout aussi bien que (8).

Formons

$$P^j \frac{DP_j}{Dx_i} + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(P^j P_j) - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} P^j + \Gamma^{j}_{i\alpha} P^{\alpha} P_j .$$

Les deux derniers termes du second membre de cette égalité se détruisent *si* $\alpha$ *et* $j$ *sont considérés à la fois comme des indices de sommation.*

Donc les dérivées en D, (8) et (10), sont des dérivées partielles généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles:

1° *On n'altère pas la première formule stokienne si, dans* $\Delta_1$, *on remplace les* $\partial$ *par des* D;

2° *On n'altère pas la formule*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(P^j P_j) = P^j \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + P_j \frac{\partial P^j}{\partial x_i} \tag{11}$$

*si, dans le second membre, on remplace les* $\partial$ *par des* D.

Bien entendu, il reste acquis, une fois pour toutes, que les $\alpha$ sont indices de sommation dans les formules (8) et (10) et même que tout indice qui figure deux fois dans un même terme est indice de sommation.

En (11) apparaît pour $P^j P_j$ une propriété qui est aussi bien vraie pour $P^j Q_j$, comme on le vérifie immédiatement; de telles expressions sont des *invariants* en Calcul tensoriel.

Les équations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i &= dP_j - \Gamma_{ij}^{\alpha} P_\alpha dx_i = 0 \ , \\ \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i &= dP^j + \Gamma_{i\alpha}^{j} P^\alpha dx_i = 0 \ , \end{aligned} \right. \tag{12}$$

manifestement construites à partir de (8) et (10), sont celles du *déplacement parallèle* de Weyl, Levi-Civita, Eddington. On pourrait déjà songer à préciser la nature des fonctions $\Gamma_{ij}^{\alpha}$ mais ce n'est pas encore indispensable; au contraire, ces fonctions, qui sont au nombre de $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dans $E_n$, c'est-à-dire de 40 dans $E_4$, tendent à servir de base, actuellement, à une gravifique généralisée en laquelle il convient de les laisser d'abord indéterminées.

Si, dans la seconde équation (12), on imagine que la composante vectorielle $P^j$ soit le déplacement infinitésimal $dx_j$, cette équation devient

$$d^2 x_j + \Gamma_{\alpha i}^{j} dx_\alpha dx_i = 0 \ . \tag{13}$$

C'est celle des *géodésiques*. Là encore, bien entendu, ce ne seront les géodésiques de variétés géométriques, au sens habituel du mot, que quand les fonctions $\Gamma$ seront convenablement déterminées mais il n'en est pas moins fort remarquable que *la forme* des équations des géodésiques, *la forme* des équations du déplacement parallèle, *la forme* des dérivées en D, sont *des formes* contenues implicitement dans la matrice (5), c'est-à-dire, si l'on veut, dans la notion de tourbillon euclidien ou, ce qui revient au même, dans la formule stokienne (2) issue elle-même de la première identité (1).

## III. — Champ électromagnétique général.

Prenons maintenant la seconde formule stokienne, c'est-à-dire (3). Il y a deux circonstances, absolument distinctes, qui rendent nul $\Delta_2$ et, par suite, les deux membres de la formule.

1° On n'impose d'abord aucune condition aux $M_{ij}$ mais $\Delta_2 = 0$ a lieu par choix de la variété V, c'est-à-dire de la fonction F qui satisfait alors à une équation aux dérivées partielles, du premier ordre, linéaire et homogène. Les équations des caractéristiques sont

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} M_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4} M_{23} &= -\rho V_{x_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} M_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4} M_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1} M_{34} &= \rho V_{x_2}, \\ \frac{\partial}{\partial x_4} M_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1} M_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{41} &= -\rho V_{x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} M_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{12} &= \rho \quad , \end{aligned}\right. \tag{14}$$

en posant

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dx_4}, \qquad V_{x_2} = \frac{dx_2}{dx_4}, \qquad V_{x_3} = \frac{dx_3}{dx_4}$$

et en désignant par $\rho$ un facteur de proportionnalité.

Les équations (14) constituent le *premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées*. Elles correspondent à un $E_4$ qui contient des $V_3$ spéciales.

2° On obtient $\Delta_2 = 0$ en annulant, dans $\Delta_2$, les mineurs de la première ligne. Alors on a des $M_{ij}$ spéciaux, que nous appel-