Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN
Autor: Buhl, A.
Kapitel: II. – Dérivées en D. — Déplacements parallèles. Géodésiques.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19743

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le mineur

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2M_{ij} .$$

Nous rencontrerons d'autres développements de déterminants à effectuer de manière analogue; l'indice ω sera dit *indice de substitution.*

Dans le premier membre de (3), l'assemblage d'indices ij conduit à *six* termes en 12, 13, 14, 23, 24, 34. On a toujours

$$M_{ii} = 0 .$$

En résumé, *nous partons des identités* (1) *ou bien*, ce qui n'est pas dire plus mais ce qui est plus explicite, *de deux formes différentielles*

$$\sum P_i \, dx_i , \qquad \sum M_{ij} dx_i \, dx_j \tag{4}$$

l'une linéaire, l'autre bilinéaire. C'est tout ce dont nous avons besoin, au point de vue des fondements essentiels, pour établir les formules générales de l'électromagnétisme et de la gravifique.

II. — Dérivées en D. — Déplacements parallèles. Géodésiques.

Fixons notre attention sur les deux dernières lignes du déterminant Δ_1; d'ailleurs ce que nous avons à dire s'appliquerait tout aussi bien aux mineurs à extraire de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{matrix} \right\| . \tag{5}$$

Soit l'égalité

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_i} & \dfrac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} \\ {}_iP_\alpha & {}_jP_\alpha \end{vmatrix} . \tag{6}$$

Le déterminant en ∂ est l'un des mineurs de (5) ; le dernier

déterminant, comme on le concevra sans peine, est à développer en

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ji} P_{\alpha} ,$$

ce qui est identiquement nul si

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ji} . \tag{7}$$

Cette hypothèse (7) sera toujours maintenue.

Donc, dans (6), rien ne généralise *le déterminant en* ∂; mais ceci n'empêche pas qu'en développant les trois déterminants de (6) on a, par considération des termes homologues et *par définition, des dérivées, en* D, *de composantes vectorielles* P_j,

$$\frac{DP_j}{Dx_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} . \tag{8}$$

A la formule (6) on peut immédiatement associer

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\omega}_{i\alpha} & \Gamma^{\omega}_{j\alpha} \\ {}^{i}P^{\alpha} & {}^{j}P^{\alpha} \end{vmatrix} \tag{9}$$

d'où, de même et *par définition, des dérivées, en* D, *d'autres composantes* P^j,

$$\frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial P^j}{\partial x_i} + \Gamma^{j}_{i\alpha} P^{\alpha} . \tag{10}$$

Cette fois le dernier déterminant de (9) n'est pas nul ce qui est une des raisons qui font distinguer les P^j des P_j. Mais (10) va cependant se justifier tout aussi bien que (8).

Formons

$$P^j \frac{DP_j}{Dx_i} + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(P^j P_j) - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} P^j + \Gamma^{j}_{i\alpha} P^{\alpha} P_j .$$

Les deux derniers termes du second membre de cette égalité se détruisent *si* α *et* j *sont considérés à la fois comme des indices de sommation.*

Donc les dérivées en D, (8) et (10), sont des dérivées partielles

généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles:

1° *On n'altère pas la première formule stokienne si, dans* Δ_1, *on remplace les* ∂ *par des* D;

2° *On n'altère pas la formule*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(P^j P_j) = P^j \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + P_j \frac{\partial P^j}{\partial x_i} \tag{11}$$

si, dans le second membre, on remplace les ∂ *par des* D.

Bien entendu, il reste acquis, une fois pour toutes, que les α sont indices de sommation dans les formules (8) et (10) et même que tout indice qui figure deux fois dans un même terme est indice de sommation.

En (11) apparaît pour $P^j P_j$ une propriété qui est aussi bien vraie pour $P^j Q_j$, comme on le vérifie immédiatement; de telles expressions sont des *invariants* en Calcul tensoriel.

Les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i &= dP_j - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_{\alpha} dx_i = 0 \ , \\ \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i &= dP^j + \Gamma^{j}_{i\alpha} P^{\alpha} dx_i = 0 \ , \end{aligned}\right. \tag{12}$$

manifestement construites à partir de (8) et (10), sont celles du *déplacement parallèle* de Weyl, Levi-Civita, Eddington. On pourrait déjà songer à préciser la nature des fonctions Γ^{α}_{ij} mais ce n'est pas encore indispensable; au contraire, ces fonctions, qui sont au nombre de $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dans E_n, c'est-à-dire de 40 dans E_4, tendent à servir de base, actuellement, à une gravifique généralisée en laquelle il convient de les laisser d'abord indéterminées.

Si, dans la seconde équation (12), on imagine que la composante vectorielle P^j soit le déplacement infinitésimal dx_j, cette équation devient

$$d^2 x_j + \Gamma^{j}_{\alpha i} dx_{\alpha} dx_i = 0 \ . \tag{13}$$

C'est celle des *géodésiques*. Là encore, bien entendu, ce ne seront les géodésiques de variétés géométriques, au sens habituel

du mot, que quand les fonctions Γ seront convenablement déterminées mais il n'en est pas moins fort remarquable que *la forme* des équations des géodésiques, *la forme* des équations du déplacement parallèle, *la forme* des dérivées en D, sont *des formes* contenues implicitement dans la matrice (5), c'est-à-dire, si l'on veut, dans la notion de tourbillon euclidien ou, ce qui revient au même, dans la formule stokienne (2) issue elle-même de la première identité (1).

III. — Champ électromagnétique général.

Prenons maintenant la seconde formule stokienne, c'est-à-dire (3). Il y a deux circonstances, absolument distinctes, qui rendent nul Δ_2 et, par suite, les deux membres de la formule.

1° On n'impose d'abord aucune condition aux M_{ij} mais $\Delta_2 = 0$ a lieu par choix de la variété V, c'est-à-dire de la fonction F qui satisfait alors à une équation aux dérivées partielles, du premier ordre, linéaire et homogène. Les équations des caractéristiques sont

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2} M_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4} M_{23} = -\rho V_{x_1}, \\
&\frac{\partial}{\partial x_3} M_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4} M_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1} M_{34} = \rho V_{x_2}, \\
&\frac{\partial}{\partial x_4} M_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1} M_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{41} = -\rho V_{x_3}, \\
&\frac{\partial}{\partial x_1} M_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} M_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} M_{12} = \rho,
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

en posant

$$V_{x_1} = \frac{dx_1}{dx_4}, \qquad V_{x_2} = \frac{dx_2}{dx_4}, \qquad V_{x_3} = \frac{dx_3}{dx_4}$$

et en désignant par ρ un facteur de proportionnalité.

Les équations (14) constituent le *premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées*. Elles correspondent à un E_4 qui contient des V_3 spéciales.

2° On obtient $\Delta_2 = 0$ en annulant, dans Δ_2, les mineurs de la première ligne. Alors on a des M_{ij} spéciaux, que nous appel-