§ 7. — Etude de la courbure.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

par deux points donnés de la sphère, puis celle du grand cercle tangent à une courbe donnée en un point donné.

Si le point M doit appartenir à la surface tétraédrique que nous étudions, il faudra qu'on ait:

$$\sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma = \frac{p^3}{m^3} \,. \tag{4}$$

En discutant les signes, on verra que l'équation (4) représente les quatre ovales et démontre la symétrie tétraédrique de leur ensemble.

§ 7. — **Etude de la courbure.**

43. — En géométrie infinitésimale, on démontre que la courbure totale, en un point ordinaire d'une surface, est l'inverse du produit des rayons de courbure principaux (19). Elle est susceptible de l'expression suivante:

$$k = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)^2}{\left\{ 1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right\}^2} \,.$$

44. — Appliquons cette formule à la surface:

$$xyz = p^3 \,.$$

Les dérivées partielles ont été données plus haut (22). On a, après un calcul facile:

$$k = \frac{3p^6 x^4 y^4 z^4}{p^{12} \left\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \right\}^2} = \frac{3}{p^6 \left\{ \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} \right\}^2} \tag{1}$$

$$= \frac{3p^6}{\left\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \right\}^2} \,. \tag{2}$$

Ces formules nous montrent que la courbure est constamment positive. Tous les points de la surface sont donc des points elliptiques.

45. — De la formule (1), on déduit que c'est aux ombilics que la courbure totale est maxima.

46. — Recherchons les lignes en tous les points desquelles

la surface a la même courbure totale. D'après la formule (1), on doit avoir:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{c^2}\cdot$$

Cette équation représente des surfaces algébriques du sixième ordre, à huit nappes, admettant les plans

$$x=\pm c\ ; \qquad y=\pm c\ ; \qquad z=\pm c\ ;$$

comme plans asymptotes. L'origine est un point quadruple isolé. Toute section faite dans l'une de ces surfaces par un plan parallèle à un plan coordonné, est une krenzcurve.

On obtient un résultat d'apparence plus simple en considérant l'équation (2). Une ligne de courbure totale constante est représentée par les équations:

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=a^4\ , \qquad xyz=p^3\ .$$

On pourrait faire ici la même remarque qu'au n° 41.

47. — Au n° 31, nous avons trouvé la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, tangent à la surface, au point (x, y, z):

$$d=\frac{3p^3}{\sqrt{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}}\ .$$

Il en résulte:

$$d^4=\frac{81p^{12}}{\left\{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\right\}^2}\ .$$

En comparant cette formule à la formule (2) du n° 44, on trouve:

$$k=\frac{d^4}{27p^6}\ .$$

Théorème: Si, en chaque point d'une ligne de courbure totale constante, on mène le plan tangent à la surface, tous ces plans enveloppent une sphère, dont le centre se trouve à l'origine.

Cette propriété est encore compatible avec la symétrie de la surface (41).

(A suivre).