§ 4. — Sections planes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

De cette dernière équation, il résulte:

1° que la surface admet la symétrie cristallographique du tétraèdre régulier;

2° qu'elle ne pénètre pas à l'intérieur du tétraèdre ombilical.

§ 4. — Sections planes.

25. — Tout plan, parallèle à l'un des plans coordonnés, coupe la surface suivant une hyperbole équilatère. En effet, les deux équations:

$$xyz = p^3 \,, \qquad z = c \,,$$

entraînent:

$$xy = \frac{p^3}{c} \,.$$

26. — Tout plan passant par l'un des axes coordonnés, coupe la surface suivant une cubique cuspidale (1). Car les deux équations:

$$xyz = p^3 \,, \qquad y = tx \,,$$

entraînent:

$$tx^2 z = p^3 \,,$$

ou

$$x^2 z = a^3 \,.$$

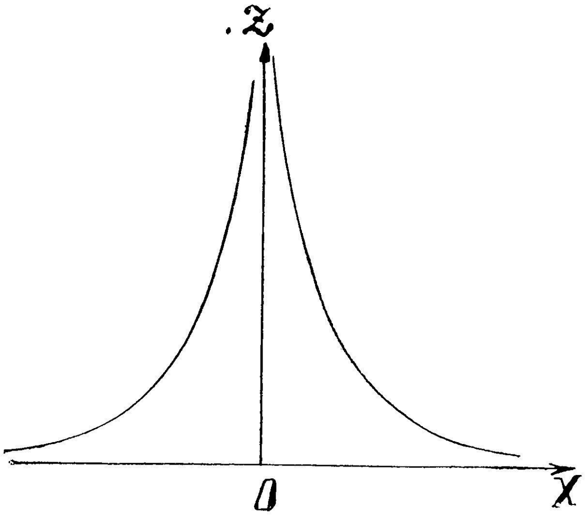

Fig. 5.

C'est une cubique [5°, c] dont le rebroussement se trouve à l'infini. Cette cubique est formée de deux branches, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des z. La constante a^3 a le même signe que t. La courbe rencontre les bissectrices des angles que font les axes coordonnés, aux points:

$$\pm x = z = a \,.$$

En ces points, les tangentes ont, pour coefficients angulaires:

$$\left[-\frac{2xz}{x^2}\right]_X = \mp 2 \,.$$

Ceci démontre que les branches, prises séparément, ne sont pas symétriques par rapport aux bissectrices.

27. — Pour étudier les sections faites par des plans perpendiculaires à un Λ^3, nous allons, tout d'abord, établir des formules de transformation des coordonnées, dont nous aurons souvent à faire usage.

Tout plan perpendiculaire à la droite $x = y = z$, coupe le trièdre coordonné trirectangle suivant un triangle équilatéral ABC, que nous prendrons comme triangle de référence.

Soient M un point quelconque du plan sécant ; x, y, z ses coordonnées rectilignes dans l'espace; α, β, γ ses coordonnées trilinéaires absolues dans le plan sécant.

La figure montre qu'on a:

$$z = \gamma \sin \theta \ ;$$

mais:

$$3 \cos^2 \theta = 1 \ ;$$

donc

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \ ;$$

et, par conséquent:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \ .$$

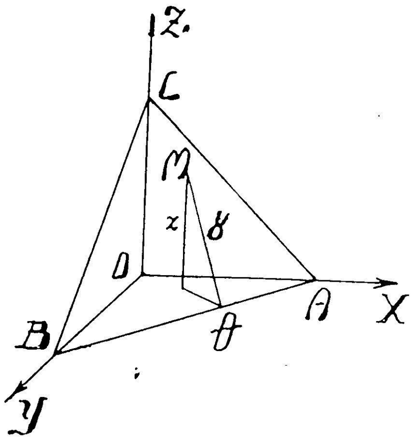

Fig. 6.

D'autre part:

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z)\sqrt{\frac{3}{2}} = \text{constante}$$

est l'équation du plan.

28. — Coupons donc la surface $xyz = p^3$ par le plan $x + y + z = l$; en coordonnées trilinéaires absolues, la section sera représentée par l'équation:

$$\alpha\beta\gamma = \left(p\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 = m^3 \ .$$

C'est donc la courbe que nous avons étudiée plus haut (2-12). Le triangle fondamental a pour hauteur:

$$\alpha + \beta + \gamma = l\sqrt{\frac{3}{2}} \ .$$

En faisant varier l de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient toutes les cubiques indiquées dans le tableau de la fin du nº 10.

29. — Toutes les sections planes ont des symétries particulières, mais qui sont compatibles avec la symétrie tétraédrique de la surface. Il suffit qu'on tienne compte de la position particulière du plan sécant (25, 26, 28).

§ 5. — **Propriétés du plan tangent.**

30. — Nous allons établir quelques propriétés de la surface, dont on ne verra pas immédiatement les relations avec la symétrie.

Nous représenterons les coordonnées courantes d'un point de l'espace par X, Y, Z, et celles du point de contact par x, y, z. L'équation du plan tangent est:

$$(X - x)yz + (Y - y)zx + (Z - z)xy = 0 \ ,$$

ou

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 3 \ .$$

Donc, les coordonnées à l'origine du plan tangent sont triples des coordonnées du point de contact. Soit ABC le triangle suivant lequel le plan tangent coupe le trièdre coordonné. Le point de contact est le centre de gravité du triangle ABC.

Tout plan tangent détermine, avec les plans coordonnés, un tétraèdre de volume constant:

$$V = \frac{9}{2}p^3 \ .$$

Tout ceci rappelle des propriétés de l'hyperbole algébrique plane du second ordre.

31. — Calculons la distance d'un plan tangent à l'origine. Cette distance est donnée par une formule bien connue de Géométrie analytique.

$$d = \frac{-3}{\pm\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{3xyz}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}}$$

ou

$$d = \frac{3p^3}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}} \ . \tag{1}$$