SUR LES RADICAUX CARRÉS

Autor(en): **Niewenglowski, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515742

SUR LES RADICAUX CARRÉS

PAR

B. Niewenglowski (Paris).

On sait qu'étant donné un nombre quelconque d'irrationnelles algébriques, on peut exprimer chacune d'elles en fonction rationnelle d'une même irrationnelle. Je me propose d'étudier un cas particulier simple:

Soient x_1, x_2, ... x_n des nombres tels que

$$x_1^2 = a_1\ ,\ x_2^2 = a_2\ ,\ ..\ x_n^2 = a_n\ ,$$

a_1, a_2, ... a_n étant rationnels, mais non tous carrés parfaits. Il s'agit de prouver que chacun des nombres x peut s'exprimer en fonction rationnelle de leur somme et de trouver les expressions de ces nombres.

Premier cas. — Soient les deux équations

$$x^2 = a \qquad y^2 = b\ .$$

Si l'on pose:

$$x + y = V\ ,\quad x - y = V'\ .$$

on en tire

$$a - b = VV'$$

et, par conséquent:

$$2x = V + \frac{a-b}{V} = V' + \frac{a-b}{V'}\ ,$$

$$2y = V - \frac{a-b}{V} = \frac{a-b}{V'} - V'\ .$$

Remarquons que si l'on change y en $-y$, V se change en V' et les expressions de x et y en fonction de V' se déduisent immédiatement de leurs expressions en V. Il suffit donc de ne garder que la fonction V.

On peut remarquer encore l'identité

$$2a + 2b = V^2 + V'^2 = V^2 + \frac{(a-b)^2}{V^2}$$

ou, sous forme entière:

$$V^4 - 2(a+b)V^2 + (a-b)^2 = 0 .$$

On peut s'en servir pour exprimer x et y par des polynomes entiers en V. On peut en effet écrire:

$$2x = V + \frac{V}{a-b} \times \frac{(a-b)^2}{V^2} = V + \frac{V}{a-b}(2a + 2b - V^2) ,$$

c'est-à-dire:

$$2x = \frac{V^3 - (3a+b)V}{b-a}$$

et, pareillement

$$2y = \frac{(3b+a)V - V^3}{b-a} .$$

On peut obtenir ces deux expressions par une autre voie. Il suffit, en effet, de résoudre les deux équations

$$x + y = V ,$$
$$(a + 3b)x + (b + 3a)y = V^3 .$$

Ayant obtenu x et y en fonctions rationnelles de V, on en déduit le produit xy: mais il est plus simple de remarquer que

$$a + b + 2xy = V^2$$

donc

$$xy = \frac{1}{2}(V^2 - a - b) .$$

On arrive au même résultat en faisant le produit des expressions entières trouvées pour x et y, et en tenant compte de l'identité

$$V^4 - 2(a+b)V^2 + (a-b)^2 = 0$$

trouvée plus haut.

Remarque. — On peut obtenir pour x et y, une infinité d'expressions rationnelles en V, plus compliquées. On a ainsi une source inépuisable d'exercices de calcul algébrique. Je vais indiquer brièvement la marche à suivre.

On a vu que

$$V^3 = (a + 3b)x + (b + 3a)y .$$

Je dis que

$$V^{2n+1} = p_n x + q_n y .$$

On le voit en supposant la loi vérifiée jusqu'à V^{2n-1} et en multipliant membre à membre les égalités

$$V^{2n-1} = p_{n-1} x + q_{n-1} y , \qquad V^2 = a + b + 2xy .$$

On pourra alors écrire par exemple

$$p_{n-1} x + q_{n-1} y = V^{2n-1} \qquad p_n x + q_n y = V^{2n+1}$$

on reconnaît que

$$p_{n-1} q_n - q_{n-1} p \neq 0 \qquad \text{si} \qquad a \neq b .$$

On aura donc

$$x = A_n V^{2n-1} + B_n V^{2n+1} \qquad y = C_n V^{2n-1} + D_n V^{2n+1}$$

les coefficients de V^{2n-1} et V^{2n+1} étant rationnels.

En posant

$$x = A_1 V + B_1 V^3$$
$$x = A_2 V^3 + B_2 V^5$$
$$x = A_n V^{2n-1} + B_n V^{2n+1}$$

et en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ des nombres rationnels arbitraires on aura encore

$$x = \frac{A_1 \lambda_1 V + (B_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2) V^3 + (B_2 \lambda_2 + A_3 \lambda_3) V^5 + \ldots + \lambda_n B_n V^{2n+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n} .$$

On pourrait encore exprimer x et y en fonction linéaire de deux puissances impaires non consécutives de V.

Quant au produit $x y$ on peut l'exprimer au moyen de puissantes paires de V. On a:

$$V^{2n} = h_n + k_n xy .$$

On le reconnaît de proche en proche, en partant de V^2.

On peut donc écrire:

$$xy = \alpha_n V^{2n} + \beta_n .$$

Cela étant, ayant obtenu

$$y = F(V) ,$$

F désignant une fonction rationnelle, on en tire:

$$bx = F(V)\left[\alpha_n V^{2n} + \beta_n\right]$$

et pareillement pour y.

Deuxième cas. — Nous considérerons maintenant 3 radicaux x, y, z définis par

$$x^2 = a , \qquad y^2 = b , \qquad z^2 = c$$

et nous chercherons x, y, z en fonctions rationnelles de V, sachant que

$$x + y + z = V .$$

Il est très facile d'obtenir des fractions rationnelles donnant x, y ou z. Par exemple, en écrivant

$$V - x = y + z ,$$

il vient, en élevant au carré et tenant compte des hypothèses:

$$V^2 + a - 2Vx = b + c + 2yz$$

et

$$(V^2 + a - b - c - 2Vx)^2 = 4bc$$

d'où, enfin

$$x = \frac{(V^2 + a - b - c)^2 + 4aV^2 - 4bc}{4V(V^2 + a - b - c)} .$$

formules analogues pour y et z.

Il s'agit maintenant d'obtenir des expressions entières.

Pour plus de commodité, nous traiterons un cas particulier:

Posons

$$x + y + z = V \tag{1}$$

avec

$$x^2 = 1 , \qquad y^2 = 2 , \qquad z^2 = 3 \tag{2}$$

c'est-à-dire:

$$x = \varepsilon , \qquad y = \varepsilon' \sqrt{2} , \qquad z = \varepsilon'' \sqrt{3}$$

ε, ε', ε'' ayant pour valeurs, arbitrairement $+ 1$ ou $- 1$.

On a ainsi:

$$V = \varepsilon + \varepsilon' \sqrt{2} + \varepsilon'' \sqrt{3} .$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (1) et simplifiant à l'aide des équations (2), on a:

$$xy + zx + xy = \frac{1}{2} V^2 - 3 ,$$

et par suite:

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = \frac{1}{2} V^3 - 3V .$$

Développant et simplifiant, en tenant compte de (1) et (2):

$$2x + y + 3xyz = \frac{1}{2} V^3 - 6V . \tag{3}$$

Pareillement

$$(2x + y + 3xyz)(yz + zx + xy) = \left(\frac{1}{2} V^3 - 6V\right)\left(\frac{1}{2} V^2 - 3\right) .$$

Développant et simplifiant, on obtient:

$$10x + y + 3xyz = \frac{1}{4} V^5 - \frac{9}{2} V^3 + 8V . \tag{4}$$

Enfin nous avons

$$(10x + y + 3xyz)(yz + zx + xy) = \left(\frac{1}{4} V^5 - \frac{9}{2} V^3 + 8V\right)\left(\frac{1}{2} V^2 - 3\right)$$

ou, plus simplement:

$$2x + y + 11xyz = \frac{1}{8} V^7 - 3V^5 + \frac{35}{2} V^3 - 42V . \tag{5}$$

Les équations (1), (3), (4), (5) permettent de calculer x, y, z et xyz.

De (3) et (4) on tire immédiatement

$$8x = \frac{1}{4} V^5 - 5V^3 + 14V .$$

Les équations (5) et (3) donnent

$$8xyz = \frac{1}{8} V^7 - 3V^5 + 17V^3 - 36V .$$

Les équations (1) et (3) fourniront les valeurs de y et z. On trouve

$$y = -\frac{3}{64}V^7 + \frac{17}{16}V^5 - \frac{37}{8}V^3 + 4V ,$$

$$z = \frac{3}{64}V^7 - \frac{35}{32}V^5 + \frac{42}{8}V^3 - \frac{9}{4}V .$$

Supposons

$$\varepsilon = +1 \qquad \varepsilon' = -1 \qquad \varepsilon'' = +1$$

c'est-à-dire:

$$x = 1 , \qquad y = -\sqrt{2} , \qquad 2 = \sqrt{3}$$

$$V = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} .$$

Nous aurons en particulier

$$V^5 - 20V^3 + 56V = 32 .$$

En continuant la même méthode, on pourrait obtenir d'autres équations du 1er degré en x, y, z et xyz et obtenir ainsi d'autres polynomes entiers en V ayant pour valeurs x, y, z et xyz. — D'autre part ayant calculé par exemple y, z et xyz, comme $xyz \times y \times z = bcx$, on pourra obtenir une autre expression pour x, etc.

Les calculs sont déjà compliqués avec 3 radicaux; avec un plus grand nombre de radicaux ils deviennent pénibles.

Troisième cas. — Cas général. Nous supposerons enfin qu'il y a un nombre quelconque n de radicaux carrés. Nous nous bornerons à prouver qu'ils s'expriment tous rationnellement en fonction de leur somme.

Soient donc

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = V$$

et

$$x_1^2 = a_1 , \qquad x_2^2 = a_2 , \dots x_n^2 = a_n .$$

Nous emploierons la méthode indiquée par Desboves pour rendre rationnelle une équation où n'entrent que des radicaux carrés. Pour cela, nous poserons

$$x_2 + x_3 + \dots + x_n = W = V - x_1$$

et nous formerons les sommes

$$W + x_2\ ,\qquad W - x_2\ ,$$

$$W + x_2 + x_3\ ,\qquad W + x_2 - x_3\ ,\qquad W - x_2 + x_3\ ,\qquad W - x_2 - x_3$$

et ainsi de suite, jusqu'à une dernière ligne dont nous n'écrirons que les termes extrêmes:

$$W + x_2 + x_3 + \dots + x_n\ ,\ \dots\dots\ W - x_2 - x_3 - \dots - x_n$$

Le dernier terme de cette suite étant nul, par hypothèse, le produit de tous ses termes est nul aussi:

$$(W + x_2 + x_3 + \dots + x_n)\ \dots\dots\ (W - x_2 - x_3 - \dots - x_n) = 0\ .$$

Ce produit contient 2^{n-1} facteurs. On reconnait aisément que dans le produit effectué les exposants de toutes les lettres sont pairs; ce produit ne contiendra donc aucun des radicaux x_2, $x_3 \dots x_n$; quant à x_1, à la première puissance, il figurera dans les puissances de W, c'est-à-dire de $V - x_1$. L'équation obtenue sera donc de la forme

$$f(V) - x_1 g(V) = 0$$

Les polynomes entiers $f(V)$, $g(V)$ étant à coefficients rationnels et respectivement de degrés 2^{n-1} et $2^{n-1} - 1$; on aura ainsi:

$$x_1 = \frac{f(V)}{g(V)}$$

on aurait des expressions analogues pour $x_2, x_3 \dots x_n$.

Proposons nous, maintenant, d'obtenir des expressions entières en V. Nous suivrons la même marche que dans le cas de 3 radicaux.

Nous avons une première équation:

$$x_1 + x_2 + \dots x_n = V\ .$$

On en déduit

$$\Sigma x_\alpha x_\beta = \frac{1}{2}(V^2 - h)$$

h étant une constante; calculons le produit $\Sigma x_\gamma \Sigma x_\alpha x_\beta$.

Un produit partiel $x_\alpha x_\beta \times x_\gamma$ donne si $\gamma = \alpha$: $x_\alpha^2 x_\beta = a_\alpha x_\beta$.

Pareillement si $\gamma = \beta$, on obtient $a_\beta x_\alpha$, et si $\gamma \neq \alpha$ et $\gamma \neq \beta$ on a $x_\alpha x_\beta x_\gamma$. Le produit sera donc $\Sigma p x_\alpha + \Sigma q x_\alpha x_\beta x_\gamma$.

On voit de même que si l'on multiplie le produit obtenu par $\Sigma x_\alpha x_\beta$, on obtiendra une somme de termes contenant chacun 1, 3 ou 5 facteurs x. Et il en sera toujours ainsi, car en multipliant un produit d'un nombre impair de facteurs x, par $x_\alpha x_\beta$, si l'un de ces facteurs entre dans le produit partiel multiplicande le nombre des facteurs, après remplacement de x_α^2 par a_α ou x_β^2 par a_β ne change pas, et si x_α et x_β ne sont ni l'un ni l'autre facteurs dans le multiplicande, le produit aura deux facteurs de plus; la parité du nombre des facteurs est conservée. Nous aurons donc comme inconnues les termes x_α, leurs produits 3 à 3, 5 à 5 ... etc., c'est-à-dire un nombre d'inconnues égal à $C_n^1 + C_n^3 + \ldots$ le dernier terme étant C_n^{n-1} si n est pair et C_n^n si n est impair — cette somme est égale à 2^{n-1}. Il faudra donc former 2^{n-1} équations. On pourra ainsi, et d'une infinité de manières obtenir des expressions entières en V pour les x, en résolvant l'un quelconque des systèmes de 2^{n-1} équations linéaires ainsi obtenues. Le plus simple aura pour degré le nombre impair de rang 2^{n-1}, soit $2 \cdot 2^{n-1} - 1$ ou $2^n - 1$. Remarquons maintenant que dans la fraction $\frac{f(V)}{g(V)}$ que nous avons obtenue plus haut, le numérateur est de degré 2^{n-1} et celui du dénominateur est $2^{n-1} - 1$; la somme de ces degrés est précisément $2^n - 1$. C'est ce que l'on peut vérifier pour les cas de $n = 2$ ou $n = 3$. Ayant obtenu pour x_α, x_β, x_γ et $x_\alpha x_\beta x_\gamma$ par exemple des représentations entières, on pourra en déduire pour x_α une représentation fractionnaire, car en supposant

$$x_\beta = P_\beta\,, \qquad x_\gamma = P_\gamma \qquad x_\alpha x_\beta x_\gamma = Q\,.$$

On aura

$$x_\alpha = \frac{Q}{p_\beta p_\gamma}\,, \qquad \text{etc.}$$

Remarque. Il résulte des calculs précédents que si V était rationnelle, chacune des quantités x_1, x_2, x_n serait rationnelle. Donc la somme

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \ldots \pm \sqrt{l}$$

est irrationnelle, si tous les nombres $a, b, c \ldots l$ ne sont pas des carrés parfaits.

Autre remarque. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ des nombres rationnels et la somme U définie par

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = U ;$$

Les x, définis comme plus haut sont des fonctions rationnelles de U. En effet, si l'on pose

$$\alpha_1 x_1 = y_1 \cdot \quad \alpha_2 x_2 = y_2 \dots \alpha_n x_n = y_n$$

on a

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = U$$

$$y_1^2 = a_1 \alpha_1^2 , \quad y_2^2 = a_2 \alpha_2^2 \dots y_n^2 = a_n \alpha_n^2 ;$$

donc les y sont des fonctions rationnelles de U, et il en est de même, par suite, des x.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE LIOUVILLE PAR L'ÉLIMINATION DU TEMPS ENTRE LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

M. Émile TURRIÈRE (Montpellier).

---

1. La méthode de LIOUVILLE, lorsqu'elle est applicable à un système à k degrés de liberté, conduit à $2k$ quadratures indépendantes les unes des autres. Ces $2k$ quadratures se partagent en deux groupes. Un premier groupe de k quadratures fournit k—1 relations entre les seuls paramètres q_1, q_2,... q_k du système; le second groupe de k quadratures donne par addition l'expression du temps.

Toutes les relations indépendantes du temps, qui déterminent géométriquement les trajectoires, se séparant ainsi, *comme conséquence du calcul*, des éléments cinématiques, je me suis proposé