CHRONIQUE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

CHRONIQUE

Congrès international des mathématiciens.

Strasbourg, 22-28 septembre 1920.

Le congrès de Strasbourg forme le premier d'une nouvelle série de congrès internationaux de mathématiciens. A l'avenir, les congrès seront organisés par l'*Union internationale de mathématiques*, [1] dont la création projetée à Bruxelles en juillet 1919, sous les auspices du *Conseil international de recherches*, a été définitivement approuvée par les délégués des pays de l'Entente, dans une réunion préliminaire tenue à Strasbourg le 20 septembre dernier.

A la suite de l'invitation adressée à titre individuel aux savants des pays de l'Entente et de quelques pays neutres, près de deux cents mathématiciens se sont réunis à Strasbourg, où ils ont trouvé l'accueil le plus chaleureux. Après les séances consacrées aux travaux scientifiques, ils ont eu le privilège de se rencontrer dans les réceptions officielles fort brillantes, organisées par le Comité local (mercredi 22 septembre), par la Société des Amis de l'Université, (jeudi 23 septembre), par la Municipalité (vendredi 24 à 10 h. $^1/_2$), par la Société des Sciences du Bas-Rhin (vendredi 24 à 20 h. $^1/_2$), par M. le Commissaire général (samedi 25). Mentionnons aussi la visite des musées et des monuments de la Ville, l'excursion à Sainte-Odile (dimanche 20 septembre), l'excursion sur le Rhin, avec visite des ports de Strasbourg et de Kehl (lundi 27 sept.), le banquet de clôture (mardi 28 sept.) et les excursions, faites au lendemain du Congrès, à Saverne, le Haut-Barr (mercredi 29) et à Colmar, aux Trois-Epis et aux champs de bataille du Linge (jeudi 30 septembre).

Séance d'Ouverture.

La séance inaugurale du Congrès a eu lieu le mercredi 22 septembre, à 9 h. et demie, à l'Aula de l'Université, sous la pré-

[1] Voir l'*Enseignement Mathématique*, XXI^e année, N^o 1. p. 59-61, 1920.

sidence de M. Charléty, recteur, en remplacement de M. Alapetite, Commissaire général de la République.

Après les paroles de bienvenue adressées aux congressistes par le Recteur et par M. Lévy, représentant la Ville de Strasbourg, M. Picard, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, parlant au nom du Comité d'organisation du Congrès, a prononcé un discours d'une grande élévation de pensée. En voici les passages essentiels :

« Quand nous vous avons proposé de vous réunir à Strasbourg, nous avons pensé rendre hommage à la noble terre d'Alsace, revenue à cette patrie française, à laquelle la rattachent ses antiques origines et des sympathies restées toujours vivaces à travers les péripéties de son histoire. Nous avons aussi voulu honorer l'Université de Strasbourg, qui, depuis le seizième siècle, a compté tant de maîtres distingués. Les hommes éminents qui y enseignent aujourd'hui tiennent dignement le rôle que leur imposent les tragiques événements de ces dernières années, en faisant d'eux les pionniers de la culture généreuse et humaine que fut toujours la culture française. Nous prions le conseil de l'Université d'agréer l'expression de notre gratitude pour la gracieuse hospitalité qu'il nous offre dans ce Palais. Comment ne pas rappeler, en ce lieu, l'admirable conduite de tant de maîtres de notre enseignement dans la guerre qui vient de finir ; leur foi patriotique a contribué à la victoire commune, qui nous permet aujourd'hui de nous réunir dans la ville de Strasbourg. Je tiens à saluer particulièrement l'un des plus jeunes maîtres de cette Université, qui porte sur son visage les traces glorieuses de son héroïsme.

« Nous sommes aussi très reconnaissants au Comité local, formé de professeurs de la Faculté des Sciences, qui, sous l'active direction de M. Henri Villat, a eu la lourde charge de régler nos séances et d'organiser les réceptions et les promenades, dont le charme tempérera l'austérité de nos travaux. Nos collègues de Strasbourg ont considéré en effet qu'ils avaient le devoir de faire connaître à nos hôtes quelque chose de cette Alsace, dont le nom est devenu un symbole. Nous voulons espérer que tous les Congressistes en emporteront un touchant souvenir.

« Il m'est enfin particulièrement agréable de remercier M. le Maire et M. le Président de la Chambre de Commerce de Strasbourg, ainsi que les représentants de nombreuses Sociétés Alsaciennes et autres généreux bienfaiteurs de ce Congrès, dont les dons nous sont extrêmement précieux et permettront des publications témoignant de l'activité scientifiques de cette Réunion.

« Dans un article récent, plein de remarques pénétrantes sur l'enseignement des mathématiques en divers pays, un professeur de cette Université évoquait le souvenir de deux mathématiciens, qui y enseignèrent jadis : *Sarrus*, dont le nom restera dans l'histoire du calcul des variations, et *Arbogast* qui apparaît comme un précurseur du Calcul fonctionnel. J'ajouterai à ces deux noms de mathématiciens celui, peut-être inattendu, de *Pasteur*. Le jeune savant, qui vint ici en 1849 enseigner la chimie, ne se montrait-il pas alors quelque peu géomètre. Les mémoires célèbres de *Pasteur* sur l'hémiédrie et la polarisation rotatoire, qui datent de cette époque, relèvent de la géométrie : géométrie bien pittoresque d'ailleurs, où certains champignons microscopiques se montrent habiles mathématiciens, puisqu'ils savent distinguer, pour s'en nourrir, entre un cristal droit et un cristal gauche. C'est par la voie de la géométrie que *Pasteur* est entré dans l'étude des fermentations. Strasbourg peut être fière d'avoir compté ce grand homme parmi ses maîtres.

« Messieurs, c'est un des objets des Congrès, comme celui que nous inaugurons aujourd'hui, d'établir des relations personnelles entre les chercheurs qui cultivent la même science ou des sciences voisines. Après l'effroyable tourmente de ces dernières années, qui a rompu tant de liens, les rapprochements sont nécessaires entre savants qui s'estiment et qui, sans aucune arrière-pensée, n'ont d'autre souci que le culte désintéressé de la vérité. Ils sont particulièrement utiles aux mathématiciens qui ont parfois montré quelque tendance à s'isoler dans des parties très limitées de leur science. De larges esquisses, faisant connaître l'état actuel de quelques grandes questions, doivent être un des attraits de réunions comme la nôtre, et peuvent exercer la plus heureuse influence. Les mathématiciens passent quelquefois pour des personnages un peu originaux, ensevelis dans leurs symboles et perdus dans leurs abstractions. Il importe que le public cultivé, de formation parfois trop exclusivement littéraire, ait une opinion plus juste à cet égard. Non, la mathématique n'est pas la science étrange et mystéreuse que se représentent tant de gens ; elle est une pièce essentielle dans l'édification de la philosophie naturelle.

« Toute théorie physique, suffisamment élaborée, prend nécessairement une forme mathématique ; il semble que les actions et réactions entre l'esprit et les choses ont amené peu à peu à former des moules où peut, partiellement au moins, s'insérer le réel. Certes, beaucoup de concepts créés par les mathématiciens n'ont pas trouvé encore d'applications dans l'étude des phénomènes physiques, mais l'histoire de la science montre qu'il serait téméraire d'affirmer que telle ou telle notion ne sera pas un jour utilisée. Les géomètres aiment à rappeler le mot du grand mathématicien Lagrange, qui, comparant un jour les mathématiques à un animal dont on mange toutes les parties, disait : « Les mathématiques sont comme le porc, tout en est bon. »

« Le métier de prophète est toujours dangereux. Quelques-uns pensent cependant que les applications des mathématiques seront surtout étudiées dans les années qui vont venir et que la théorie pure sera quelque peu négligée par les jeunes générations. Le temps où nous vivons devient en effet singulièrement dur dans tous les domaines pour les ouvriers de l'intelligencee, et les plus optimistes se demandent parfois avec inquiétude si la civilisation, telle que nous sommes habitués à l'envisager, ne va pas subir une éclipse. Aussi ne devons-nous pas nous lasser de répéter que les spéculations théoriques sont en dernière analyse la véritable source de tous les progrès dans les sciences appliquées. Si par malheur la recherche désintéressée cessait d'être possible, le capital scientifique accumulé dans les âges antérieurs s'épuiserait rapidement, et on ne continuerait pas longtemps à vivre du parfum d'un vase vide, comme disait Renan pour un autre objet. Quoi qu'il advienne, on trouvera toujours parmi les mathématiciens des incorrigibles idéalistes, qui, semblables à la femme de l'Evangile, croiront avoir choisi la meilleure part en scrutant les propriétés de l'espace et en analysant dans ses recoins les plus subtils l'idée de fonction ; elle ne leur sera pas ôtée. C'est dans l'espérance que les mathématiques pures et les mathématiques appliquées continueront une collaboration féconde, que nous commençons les travaux de ce Congrès, où de très nombreuses communications nous ont été promises, et où d'éminents géomètres voudront bien nous faire quelques conférences générales sur les progrès et les tendances de la science qui nous est chère. Que tous ceux qui vont ainsi contribuer à l'éclat de cette réunion veuillent bien recevoir par avance les remerciements du Comité d'organisation. »

Délégations. — On entendit ensuite les délégués des différents pays. Tous ont rendu hommage à la science française.

Bureau du Congrès. — Dans une seconde séance, d'un caractère purement administratif, le Congrès a constitué comme suit son Bureau :

Président d'honneur : M. Camille Jordan, membre de l'Institut. — *Président :* M. Emile Picard, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — *Vice-présidents :* MM. Dickson, professeur à l'Université de Chicago, Larmor, professeur à l'Université de Cambridge, Nörlund, professeur à l'Université de Lund, de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, Villat, professeur à l'Université de Strasbourg, Volterra, professeur à l'Université de Rome. — *Secrétaire général :* M. Kœnigs, membre de l'Institut. — *Secrétaire :* M. Galbrun, professeur à l'Université d'Aix-Marseille.

Union internationale de Mathématiques. — Dans cette même séance, il a été donné communication des Statuts de l'Union. Les pays neutres ont été invités à donner leur adhésion.

Conférences générales

Les conférences générales, au nombre de cinq, ont été réparties comme suit :

1. — Jeudi 23 septembre, 14 h. 30. — Sir Joseph Larmor, professeur à l'Université de Cambridge (Angleterre) : *Questions in physical interdetermination.*

2. — Vendredi 24 septembre, 14 h. 30. — M. Dickson, professeur à l'Université de Chicago : *Relations between the Theory of Numbers and other branches of Mathematics.*

3. — Samedi 25 septembre, 10 h. 30. — M. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain : *Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent.*

4. — Lundi 27 septembre, 10 h. 30. — M. Volterra, professeur à l'Université de Rome : *Sur l'enseignement de la Physique mathématique et de quelques points d'analyse.*

5. — Mardi 28 septembre, 14 h. 30. — M. Nörlund, professeur à l'Université de Lund (Suède) : *Sur les équations aux différences finies.*

Nous sommes en mesure de pouvoir donner un aperçu très fidèle de ces conférences, grâce aux résumés qu'ont bien voulu nous remettre MM. les auteurs.

1. — Conférence de Sir Joseph Larmor : *Questions in physical interdetermination.* — La relativité est essentiellement une détermination locale. Ceci implique pourtant des relations entre ces déterminations locales dont l'ensemble n'est alors pas distinct du prolongement de l'une d'elles au-delà de son propre domaine. Il y a donc interdétermination.

Dans la relativité de la gravitation, il y a quatre degrés d'indétermination, une région de l'espace-temps étant déterminée localement par six variables au moyen d'équations différentielles. Les quatre autres variables dont la présence dans la théorie s'impose, deviennent superflues, grâce à certaines identités, pour une région déterminée seulement par des relations entre distances ; elles sont au contraire indispensables, si cette région a des caractéristiques électriques aussi bien que métriques. Un champ électrique détermine toute chose : on peut dire qu'il détermine un éther de référence qui, autrement, resterait latent.

La méthode analytique symbolique en physique a été développée systématiquement par Lagrange. Elle est moins expressive, mais elle est moins limitée par sa dépendance de l'intuition que la méthode directe de géométrie vectorielle infinitésimale. Ces deux méthodes se complètent l'une l'autre.

Le principe de prolongement complet a été énoncé par Gauss pour le potentiel Newtonien. Il peut être étendu à tout problème statique où la stabilité est présupposée : (exemple : un milieu élastique). Il n'y a pas là relation de cause à effet, mais uniquement concomitance.

Le principe se perd dans un quasi-espace comme celui de Minkowski. Une telle extension à quatre paramètres est l'analogue, non pas de l'espace, mais de la radiation dans l'univers actuel.

Toute communication entre les objets permanents (atomes de matière), est établie par radiation — exceptées les influences de gravitation.

C'est une interdétermination limitée. Un champ de radiation ne peut être étendu par prolongement à moins que nous ne connaissions la distribution des « sources » (atomes radiant) au-delà de ce champ.

La radiation pure exige que l'espace ait précisément trois dimensions.

Un champ de radiation a des propriétés intrinsèques par rapport au groupe de transformations à quatre paramètres de Minkowski, tout comme un corps solide n'a de sens que dans le groupe cartésien à trois paramètres de l'espace ordinaire.

Le principe de moindre action est fondamental en physique parce que, d'après Hamilton, il établit un système de relations « extrêmales », c'est-à-dire de relations aux extrémités, aux limites de l'intégrale. L'action à distance est remplacée par des relations à distance, dues cependant à l'intermédiaire de radiations dans l'espace-temps.

Si un système matériel composé d'un ensemble fini d'atomes et d'ions est donné, son champ d'activité devrait être défini et déterminé sans pour cela pouvoir être exprimé au moyen des longueurs et des temps par lesquels nous exprimons habituellement l'ensemble donné espace-temps. Nous pouvons appeler *éther* le complexe de relations qui déterminent ce champ d'activité. Dans un tel éther (aussi bien que dans la théorie d'Einstein), la gravitation peut être absorbée et les rayons déviés près du soleil. Mais on n'y peut admettre le déplacement des raies du spectre solaire.

2. — Conférence de M. Léonard Dickson : *Relations between the Theory of Numbers and other Branches of Mathematics.* — Dans cette conférence, nous envisageons quelques problèmes typiques de la théorie des nombres abordés par le moyen d'autres parties des mathématiques, plutôt que de faire une discussion technique de cette théorie.

Ainsi, je donne d'abord une application de la géométrie pour trouver toutes les solutions rationnelles de quelques équations homogènes. Je ne parle pas ici des équations du second degré dont toutes les solutions rationnelles peuvent se trouver tout de suite quand une solution est connue, parce que nous pouvons évidemment exprimer rationnellement les coordonnées de tous les points d'une surface quadrique par le moyen des droites passant par un point choisi sur la surface.

Pour fixer les idées je débute par la surface cubique de Hermite qui contient deux droites dont les équations ont leurs coefficients rationnels. Toute droite qui coupe celle-ci rencontrera la surface en un seul autre point dont les coordonnées sont par suite rationnelles. Une seconde méthode de solution est basée sur le fait que la surface cubique est le lieu des intersections des plans correspondants de trois faisceaux projectifs de plans (chaque faisceau étant la totalité des plans passant par un point). Nous pouvons passer de notre première solution qui est du 4^e degré par rapport à l'ensemble des paramètres à la seconde solution qui est du 3^e degré par rapport aux nouveaux paramètres, au moyen d'une transformation birationnelle des paramètres, transformation qui se trouve être ici sa propre inverse.

D'une façon générale, quand on a deux représentations paramétriques quelconques de tous les points d'une surface unicursale, les deux ensembles de paramètres sont liés par une transformation birationnelle.

Ensuite j'examine le problème plus difficile de trouver toutes les solutions en entiers, ou plus exactement de trouver des formules qui donnent toutes les solutions en entiers, quand les paramètres n'ont que des valeurs entières. En cherchant des matières intéressantes pouvant illustrer ce sujet, j'ai découvert une méthode bien simple et générale pour trouver les formules qui donnent toutes les solutions en entiers des équations homogènes et quadratiques à plusieurs variables. Dans le cas le plus simple, ces formules expriment le fait que la norme du produit de deux nombres complexes est égale au produit de ses normes.

Pour les équations à quatre variables, nous avons besoin de quelques propriétés simples des nombres algébriques, tandis que pour les équations à six variables nous faisons application des propriétés des quaternions entiers. En accord avec le but de cet exposé qui est de faire voir des applications de plusieurs parties des mathématiques à la théorie élémentaire des nombres, je saisis cette occasion de montrer que les théories des nombres algébriques et hypercomplexes nous donnent des moyens effectifs pour traiter la solution en entiers des équations.

Enfin, j'indique comment les invariants se présentent tout à fait naturellement dans la théorie des nombres.

3. — Conférence de M. C. de la Vallée Poussin : *Les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent.* — La défini-

tion des fonctions à variation bornée est due à M. C. JORDAN (C-R, 1881). L'illustre mathématicien français y a été conduit dans l'étude de la convergence des *séries de Fourier* ; et, plus tard, il a trouvé une application toute naturelle de la même notion dans l'étude des *courbes rectifiables* (Cours, t. III, 1887).

Cette notion des fonctions à variation bornée s'est montrée extrêmement féconde. Parmi ceux qui ont poursuivi la voie ouverte par M. Jordan pour l'étude des séries de Fourier, il faut citer, en toute première ligne, M. W.-H. YOUNG, qui a publié sur la question un grand nombre de mémoires et obtenu les résultats les plus généraux.

Mais le conférencier ne s'occupe point de ces travaux. Le développement de la théorie des fonctions à variation bornée s'est fait dans un sens inattendu et que l'inventeur ne pouvait prévoir, parce que ce développement n'est devenu possible qu'après les travaux de M. Lebesgue sur les intégrales définies.

L'instrument imaginé par M. Lebesgue a permis de pousser extrêmement loin l'*étude intrinsèque* des fonctions à variation bornée, de les disséquer en quelque sorte et de faire apparaître leurs parties constitutives distinctes. C'est de cette étude que le conférencier s'est proposé d'exposer les résultats les plus généraux et les conséquences les plus importantes.

Il s'occupe d'abord des diverses *définitions de l'intégrale de Lebesgue*. On peut les ramaner à trois types distincts : celle de M. Lebesgue, celle de M. Borel et celle de M. Young. La plus naturelle, parce que c'est celle qui altère le moins la conception antérieure de l'intégrale, est celle de M. LEBESGUE, mais elle suppose les recherches de M. BOREL sur la mesure des ensembles. Les deux autres ne sont venues à l'esprit qu'après le théorème de M. Lebesgue sur l'intégration terme à terme. La démonstration de M. BOREL paraît être la plus élémentaire, parce qu'elle écarte la mesure des ensembles et ne conserve que le principe le plus simple qui sert à édifier cette théorie. La méthode de M. YOUNG est parfaite en son espèce, elle écarte la notion même d'ensemble et ne fait intervenir que des conditions élémentaires de convergence. Mais, à notre point de vue actuel, la méthode de M. Lebesgue est la meilleure, parce que c'est celle qui prépare le mieux à l'étude de l'intégrale *comme fonction d'ensemble,* et que ce point de vue nous est indispensable.

Un des résultats essentiels obtenus dans les derniers temps est d'avoir montré l'identité des fonctions de point à variation bornée et des fonctions additives d'ensemble. L'étude intrinsèque des fonctions à variation bornée se confond donc avec celle des fonctions additives d'ensemble. Mais cette étude est bien plus simple et bien plus instructive quand elle se fait sur les fonctions d'ensemble plutôt que sur les fonctions de point. L'analyse fait apercevoir dans ces fonctions trois parties constitutives distinctes dont elles sont les sommes :

1° Une fonction absolument continue : c'est l'*intégrale indéfinie ;*

2° Une fonction continue sans l'être absolument : c'est la *fonction singulière ;*

3° Une fonction essentiellement discontinue : c'est la *fonction des sauts.*

La fonction des sauts est attachée à un ensemble dénombrable D facile à définir. La fonction singulière est attachée à un ensemble de mesure nulle S plus difficile à caractériser et le conférencier expose les résultats qu'il a obtenus et publiés sur la question.

La définition de l'intégrale d'une fonction continne rentre comme cas particulier dans une définition plus générale, celle de l'*intégrale de Stieljes.* M. Lebesgue s'est posé la question de savoir si l'intégration au sens de Stieljes, ou *par rapport à une fonction à variation bornée,* peut s'étendre aux autres fonctions intégrables. M. Lebesgue a résolu la question en ramenant, par un changement de variable, l'intégrale de Stieljès à une intégrale ordinaire. Mais M. Young a reconnu le premier, en se servant de sa méthode de définition de l'intégrale de Lebesgue, que la définition de cette dernière intégrale est un cas particulier de celle de l'intégrale de Stieljes, mais un cas particulier qui ne présente par rapport au cas général *aucune simplification véritable.* Le conférencier montre que l'on arrive exactement au même résultat avec le procédé de définition de M. Lebesgue.

L'importance de l'intégrale de Stieljes est apparue tout récemment sous son vrai jour, grâce aux travaux de MM. Fr. Riesz, Hadamard et M. Fréchet. Les fonctions d'ensemble se rattachent aux *opérations fonctionnelles,* ou simplement aux *fonctionnelles,* dont M. Fréchet a ébauché la théorie générale. Les fonctions additives d'ensemble se confondent avec les fonctionnelles auxquelles M. Hadamard a donné le nom de *fonctionnelles linéaires.* Or M. Riesz a obtenu ce résultat essentiel : *Toute fonctionnelle linéaire s'exprime par une intégrale de Stieljes.*

Cette intégrale est ainsi rattachée à la plus importante des questions que l'on puisse se poser sur les fonctionnelles, à savoir celle de leur *différentiation.* En effet, la différentielle d'une fonctionnelle est, par définition, une fonctionnelle linéaire. Mais nous n'avons encore sur cette question toute neuve que les Mémoires de M. Fréchet et nous ne pouvons pas encore prévoir ce que l'avenir nous réserve d'intéressantes découvertes dans cette voie.

4. — Conférence de M. V. Volterra : *Sur l'enseignement de la Physique mathématique et de quelques points d'Analyse.* — M. Volterra se propose dans sa conférence d'esquisser le pro-

gramme d'un cours qu'il appelle de *physique analytique*, où les différentes théories seraient exposées d'une manière systématique et organique. Il donne d'abord un rapide aperçu sur l'histoire de la physique mathématique et examine la méthode suivant laquelle on enseigne ordinairement cette discipline.

Il se demande si, en prenant pour modèle la mécanique analytique, on ne pourrait pas constituer, pour la physique mathématique, quelque chose qui s'en approche. A son avis, il est actuellement possible de le faire: de même que les équations de la mécanique analytique relient entre eux des problèmes très différents de mécanique, celles de la physique mathématique unissent aussi des questions bien différentes au point de vue physique.

M. Volterra propose de trouver d'abord, d'une manière très rapide, les équations classiques de la propagation de la chaleur, de l'élasticité, de l'électromagnétisme, de l'hydrodynamique et de poser, sans perdre de vue le point de vue physique, les problèmes fondamentaux à résoudre. Les équations obtenues sont d'une nature très semblable.

Il faut maintenant les classer et donner les méthodes générales pour leur résolution. Ce serait l'objet de la seconde partie du cours. M. Volterra propose de faire cette classification au point de vue des caractéristiques. Il classe en même temps les types des différents problèmes. Quant aux méthodes à employer, il les distingue en trois types fondamentaux : celui de Green, celui des caractéristiques et celui des solutions simples.

Il examine ces divers procédés et il en prend occasion pour exposer quelques questions particulières d'un intérêt spécial. Il montre les relations qui conduisent ainsi, d'une manière assez simple et qui évite bien des difficultés, aux concepts de la relativité, aux transformations de Lorentz et à d'autres questions dont il donne un aperçu.

M. Volterra expose comment la méthode préconisée par lui permet de traiter simultanément plusieurs questions de physique mathématique se rapportant à des questions différentes de physique, en faisant ressortir le sens physique des résultats qu'on obtient. Il s'occupe d'une manière spéciale de certaines relations de réciprocité qui, tout en ayant un intérêt pour la solution analytique des problèmes, conduisent, dès qu'on les interprète, à d'importantes propriétés de physique : il cite en particulier, comme exemple, certaines propriétés qui se rattachent à l'étude du phénomène de Hall.

Il porte ensuite son attention sur l'intérêt d'une étude systématique des intégrales fondamentales, de leur signification physique, de leurs propriétés et plus spécialement de leurs singularités.

La troisième partie du programme est consacrée à l'application des méthodes qui se rattachent à la théorie des fonctions qui dépendent d'un nombre infini et continu de variables et qui permettent la résolution complète des problèmes posés. M. Volterra montre comment ces méthodes s'introduisent ici naturellement. Il indique la classification qu'on peut en faire et les principales questions qui s'y rattachent.

5. — Conférence de M. N.-E. Nörlund : *Sur les équations aux différences finies.* — Dans cette conférence on envisage le calcul aux différences finies du point de vue de la théorie des fonctions. Le premier problème important qui se pose dans cette branche de l'analyse, c'est l'étude des solutions de l'équation

$$\underset{\omega}{\Delta} F(x) = \varphi(x) \,, \qquad \text{où} \qquad \underset{\omega}{\Delta} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega} \,. \tag{1}$$

La série

$$-\,\omega \sum_{s=0}^{\infty} \varphi(x + s\omega)$$

satisfait formellement à cette équation, mais elle diverge en général. En appliquant à cette série certains procédés de sommation on peut, dans des cas étendus, associer avec elle une fonction de x et de ω, soit $F(x \,|\, \omega)$, qu'on appelle la solution principale de l'équation (1). Cette solution est déterminée à une constante arbitraire près. Elle possède plusieurs propriétés remarquables qui la distinguent des autres solutions de l'équation (1).

Soit m un entier positif quelconque. On a

$$\sum_{s=0}^{m-1} F\left(x + \frac{s\omega}{m} \,\middle|\, \omega\right) = mF\left(x \,\middle|\, \frac{\omega}{m}\right) \,.$$

Quand ω tend vers zéro par des valeurs positives, la fonction $F(x \,|\, \omega)$ tend vers une limite et l'on trouve

$$\lim_{\omega \to 0} F(x \,|\, \omega) = \int_a^x \varphi(z)\, dz \,.$$

Ces deux équations entraînent que

$$\frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} F(z \,|\, \omega)\, dz = \int_a^x \varphi(z)\, dz \,.$$

Si la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^{1+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0 \,, \qquad \varepsilon > 0$$

on démontre que la fonction $F(x \mid \omega)$ admet, elle aussi, pour $x > b$, une dérivée continue d'ordre m qui tend vers une limite quand x augmente indéfiniment. Cette propriété caractérise la solution principale. Je donne successivement plusieurs autres propriétés qui peuvent servir comme définition de la solution principale et je fais voir comment cette fonction se comporte au voisinage de ses points singuliers.

J'envisage ensuite les équations aux différences finies les plus générales de la forme

$$f_i(x + \omega) = R_i(f_1(x), \dots f_n(x), x), \qquad i = 1, 2 \dots n. \tag{2}$$

Ces équations peuvent se résoudre à l'aide de la méthode des approximations successives de M. Picard. Dans chaque approximation il faut résoudre une équation de la forme (1). On démontre que les approximations successives convergent vers une limite qui est une solution des équations (2). Ces solutions forment une classe étendue de transcendantes nouvelles.

Séance des Sections.

Liste des communications présentées au Congrès.

Section I: Arithmétique, Algèbre, Analyse.

M. Young (Aberystwyth). Sur les définitions de l'aire et du volume et leur développement analytique.

M. Dickson (Chicago). Homogenous polynomials with a multiplication theorem.

M. Chatelet (Lille). La loi de réciprocité abélienne.

M. Daniell (Londres). On Stieltjes integrals and Volterra Compositions.

M. Amsler (Nancy). Sur le calcul symbolique sommatoire.

M. Fueter (Zurich). Einige Sätze aus der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Funktionen.

M. Denjoy (Strasbourg-Utrecht). Sur une classe d'ensembles parfaits en relation avec les fonctions admettant une dérivée généralisée.

M. Stoilow (Jassy). Sur les ensembles de mesure nulle.

M. Du Pasquier (Neuchâtel). Sur une théorie des nombres complexes.

M. Wiener (Cambridge, Mass.). One certain iterative properties of bilinear operation.

M. E. Picard (Paris). Sur les équations aux différences finies.

M. Drach (Paris). L'intégration logique des équations différentielles; applications à l'analyse.

M. Hadamard (Paris). Sur la solution élémentaire des équations linéaires aux dérivées partielles et sur les propriétés des géodésiques.

M. Takagi (Tokio). Sur quelques théorèmes généraux de la théorie des nombres algébriques.

M. Typpa (Belgrade). Sur l'équation du troisième degré.

M. Störmer (Christiania). Méthode d'intégration numérique des équations différentielles ordinaires.

M. Remoundos (Athènes). Sur le module et les zéros des fonctions analytiques.

M. Varopoulos (Paris). Sur le module maximum des fonctions algébroïdes.

M. Riabouschinsky (Russie). Sur le calcul des valeurs absolues.

M. Zervos (Athènes). Remarques sur certaines transformations des équations aux dérivées partielles.

M. Radl (Prague). Sur la transformation des équations différentielles linéaires.

M. P. Boutroux (Paris). Sur une équation différentielle et une famille de fonctions entières.

M. Lefschetz (Lawrence, Kans.). Quelques remarques sur la multiplication complexe.

M. Wawre (Neuchâtel). Sur un système d'équations à une infinité d'inconnues.

M. Wiener (Cambridge, Mass.). On the Theory of Sets of points in terms of continuous transformations.

M. Deruyts (Liége). Une propriété simple des systèmes transformables.

M. Ogura (Osaka). Sur la théorie de l'interpolation.

M. Valiron (Strasbourg). Sur un point de la théorie des fonctions entières.

M. Zervos (Athènes). Sur l'intégration de certains systèmes différentiels indéterminés.

M. Rey-Pastor (Madrid). Sur la transformation conforme.

M. Walsh (Catonsville, Md.). On the location of the Roots of the derivation of a Polynomial.

M. Zaremba (Cracovie). Sur un théorème fondamental relatif à l'équation de Fourier.

M. Young (Aberystwyth). Sur certaines intégrales doubles.

M. Sackellariou (Athènes). Sur les solutions discontinues du problème du calcul des variations dans l'espace à n dimensions.

Section II : Géométrie.

M. Aprile (Sicile). Le congruenze di coniche d'ordine due a classe zero delle spacio. *(Communication non faite.)*

M. Bydzowsky (Prague). Sur les transformations quadratiques reproduisant une quartique elliptique plane.

M. Taylor (Cambridge, Mass.). La géométrie analytique des variables complexes.

M. Cartan (Paris). Sur le problème général de la déformation.

M. Drach (Paris). L'intégration logique des équations différentielles; applications à la géométrie et à la mécanique.

M. Eisenhart (Princeton). Transformation des systèmes conjugués R.

M. C. Jordan (Paris). La classification des constellations.

M. Clapier (Puyricard, B. du Rhône). Sur la transformation de Lie.

M. Hostinsky (Prague). Sur les propriétés de la sphère qui touche quatre plans tangents consécutifs d'une développable.

M. Sobotka (Prague). Sur la deuxième indicatrice en un point d'une surface.

M. Le Roux (Rennes). Sur la géométrie des déformations des milieux continus.

M. Eisenhart (Princeton). Transformation des surfaces applicables sur une quadrique.

M. Murray (Cambridge, Mass.). Method of classifying all polygons having a given set of vertices.

M. Hatzidakis (Athènes). Sur quelques formules de géométrie cinématique.

Section III: Mécanique, Physique mathématique, Mathématiques appliquées.

M. Vanderlinden (Vecle, Belg.). Les théories d'Einstein et leurs applications à l'Astronomie.

M. Brillouin (Paris). Sur un type d'action à hérédité discontinue et les équations différentielles qui en résultent.

M. Schwœrer (Colmar). Détermination de l'équation séculaire de la terre dans la théorie d'Arrhénius.

M. E. Guillaume (Berne). Expression mono et polyparamétrique du temps dans la théorie de la relativité.

M. Willigens (Berne). Représentation géométrique du temps dans la théorie de la relativité.

M. Hadamard (Paris). Sur le problème mixte pour une équation linéaire aux dérivées partielles.

M. Banerji (Calcutta). A some probleme in warthquake. *(Communication non faite.)*

M. Boccardi (Turin). Sur le déplacement du pôle.

M. da Costa-Lobo (Coïmbre, Portugal). Sur la courbe décrite par le pôle sur la surface de la terre.

M. Boccardi (Turin). Sur les approximations numériques et les sciences d'observation.

M. Farid-Boulad (Le Caire). Nouveau théorème pour calculer les tensions des barres surabondantes des poutres et arcs à montants et croix de Saint-André.

M. GREENHILL (Londres). La fonction potentielle uniaxiale et sa fonction de force orthogonale.

M. GULDBERG (Christiania). Une application des polynômes d'Hermite à un problème statistique.

M. HOSTINSKY (Prague). Sur un problème général de la mécanique vibratoire.

M. MAILLARD (Lausanne). Mise au point des hypothèses cosmogoniques nébulaires.

M. ROSENBLATT (Cracovie). Sur la théorie des figures d'équilibre des masses fluides animées d'un mouvement de rotation. *(Communication non faite.)*

M. Pierre WEISS (Strasbourg). Sur le repérage par le son.

M. RIABOUSCHINSKY (Russie). Sur la résistance des fluides.

M. LARMOR (Cambridge, Angl.). Sur la pression des ondes sonores.

M. LARMOR. Sur les rayons diffractés attachés aux images optiques.

M. H. VILLAT (Strasbourg). Sur le mouvement variable d'un solide dans un fluide.

M. de DONDER (Bruxelles). Sur la gravifique. *(Communication réunie avec celle de M. Vanderlinden.)*

M. BARRAU (Groningue, Holl.). Sur la cinématique plane.

M. BAUER (Strasbourg). Remarques élémentaires sur le principe de relativité en électrodynamique.

Section IV : Divers. Questions historiques et pédagogiques.

M. GÉRARDIN (Nancy). Décomposition des nombres.

— Machines à congruences.

— Des nombres entiers. — Jeux scientifiques.

M. BROCARD (Bar-le-Duc). 22 propositions de Fermat.

M. DELAPORTE (Paris). Sur la réforme du calendrier.

M. DU PASQUIER (Neuchâtel). Sur les nombres transfinis.

M. GREENHILL (Londres). Les fonctions de Bessel et Fourier comparées.

M. d'OCAGNE (Paris). La pratique courante de la méthode nomographique des points alignés, à propos de ses applications de guerre.

M. GROSSMANN (Zurich). Sur l'état de la publication des œuvres d'Euler.

M. PESTIGLIONE (Milan). Cyclométrie mécanique. *(Communication non faite.)*

M. DUBECQ (Buénos-Aires). Communication sur l'enseignement en République Argentine. *(Communication présentée par M. G. Kœnigs.)*

M. ZERVOS (Athènes). Sur l'enseignement du calcul différentiel et intégral.

Séance de Cloture.

La séance officielle de clôture a eu lieu le mardi 28 septembre, à 17 heures, sous la présidence de M. Alapetite, Commissaire général de la République. Après le discours de M. Picard, président du Congrès, et le rapport de M. Kœnigs, secrétaire général, de chaleureux remerciements ont été exprimés à tous ceux qui ont contribué à la réussite du Congrès et tout particulièrement au Comité d'organisation. H. Fehr.

Compte Rendu du Congrès a l'Académie des Sciences de Paris.

En rendant compte du Congrès à l'Académie des Sciences[1], M. E. Picard, secrétaire perpétuel, s'est exprimé en ces termes:

« Il ne sera peut-être pas sans intérêt de donner quelques renseignements sur le Congrès international de Mathématiques, qui vient de finir. C'est à Bruxelles l'année dernière, à la troisième conférence interalliée des Académies scientifiques, que la proposition fut faite de réunir un tel Congrès à Strasbourg. L'Académie se rappelle que la reprise des relations internationales après la guerre avait été étudiée longuement à Londres et à Paris, en octobre et novembre 1918, dans deux conférences interacadémiques, où figuraient des représentants des puissances alors en guerre avec les empires centraux. Dans ces réunions, il fut insisté fortement sur ce point que les guerres antérieures n'avaient pas détruit la mutuelle estime des savants belligérants les uns pour les autres, et que la paix alors avait pu effacer après peu d'années les traces du passé. « Mais aujourd'hui, concluaient à l'unanimité les délégués des pays alliés, les conditions sont tout autres. Des crimes sans nom vont laisser, dans l'histoire des nations coupables, une tache que des signatures au bas d'un traité ne sauraient laver. Aussi devrons-nous abandonner les anciennes associations internationales, et en créer de nouvelles avec le concours éventuel des neutres. » Tels sont les principes qui ont guidé les décisions prises d'abord à Londres et à Paris, confirmées et précisées dans une nouvelle conférence tenue à Bruxelles en juillet 1919. Un Conseil international de recherches fut créé, auquel se rattachaient, par l'adhésion à certaines idées générales, mais en gardant une large indépendance, des Unions internationales se rapportant aux différents ordres de sciences. Enfin, les nations neutres seraient priées d'adhérer au Conseil international de recherches, ainsi qu'aux diverses Unions[2].

---

[1] Séance de l'Académie des Sciences du 4 octobre 1920.

[2] Pour le détail des résolutions prises, voir les *Comptes rendus* des 21 octobre 1918, 9 décembre 1918 et 25 août 1919.

« Ce programme est presque entièrement réalisé aujourd'hui. Un grand nombre de pays ont adhéré au Conseil international de recherches, et diverses Unions ont été fondées, dont en dernier lieu l'Union internationale de Mathématiques.

« C'est conformément à ce plan général que fut convoqué le Congrès, qui s'est réuni à Strasbourg, du 22 au 30 septembre. Il est le premier Congrès scientifique international réuni depuis la guerre. Il inaugure un ordre nouveau ne s'insérant dans aucune suite déjà commencée. Des invitations personnelles avaient été envoyées par le Comité national français de Mathématiques aux savants des pays alliés et amis. Nous n'avons jamais dissimulé que nous entendions donner à ce Congrès une signification particulière en le réunissant à Strasbourg. Aussi avons-nous été extrêmement touchés de l'empressement avec lequel nos amis étrangers ont répondu à notre appel. Arrivés dans cette ville, ils se sont laissés, comme nous, pénétrer par l'atmosphère alsacienne, et beaucoup se sont livrés à des réflexions que, loin d'ici, ils n'avaient pas été amenés à faire. Des liens plus intimes ont été formés qui resteront précieux.

« A tout point de vue, le Congrès qui vient de se terminer a réussi au-delà de nos espérances. Nos diverses sections ont entendu des communications de haute importance. Cinq conférences générales, extrêmement brillantes, ont été faites : notre associé étranger, M. Volterra, professeur à l'Université de Rome, a parlé de l'enseignement de la Physique mathématique; trois de nos correspondants, Sir Joseph Larmor, professeur à l'Université de Cambridge; M. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain; M. Dickson, professeur à l'Université de Chicago, ont choisi, comme sujets de leurs conférences, l'indétermination en physique, les fonctions à variation bornée, les relations entre la théorie des nombres et d'autres branches des Mathématiques. Enfin, M. Nörlund, professeur à l'Université de Copenhague, nous a entretenus de la théorie des équations aux différences finies. Toutes les communications et les conférences générales seront réunies dans un Ouvrage qui restera le témoin de l'activité scientifique de ce Congrès.

« M. le Ministre des Affaires étrangères, M. le Commissaire général d'Alsace-Lorraine, M. le Maire et M. le Président de la Chambre de commerce de Strasbourg ont bien voulu s'intéresser à l'œuvre entreprise. Nous avons aussi rencontré un concours empressé auprès des diverses sociétés industrielles et financières, ainsi que de nombreux particuliers, qui ont compris que, dans les circonstances présentes, la réussite de la réunion projetée importait à l'honneur de la Science française. Des uns et des autres nous avons reçu de larges subventions. Je suis sûr d'être l'interprète de l'Académie, qui a pris une si large part dans l'élaboration des nouveaux statuts internationaux, en adressant en son nom des remerciements à tous ceux qui ont contribué à l'éclat du Congrès de Strasbourg. »

Les travaux de la Section de Mathématiques et d'Astronomie de l'Association française pour l'Avancement des Sciences.

Congrès de Strasbourg, 26-28 juillet 1920.

Les travaux de la Section de Mathématiques, Astronomie, Géodésie, Mécanique, ont été organisés par le président, M. Esclangon, directeur de l'Observatoire, et le secrétaire, M. A. Gérardin, de Nancy. Voici un bref résumé des séances et des 23 communications :

M. Esclangon souhaite la bienvenue aux congressistes et rappelle brièvement la vie des mathématiciens décédés depuis la guerre.

1. — M. A. Véronnet, de Strasbourg, présente un mémoire *Sur la constitution, la formation et l'évolution des astres.* — Les astronomes avaient appliqué jusqu'à présent au Soleil et aux étoiles la formule des gaz parfaits, ou la loi de Mariotte, formule trop simple, inapplicable aux hautes pressions. M. Véronnet a utilisé la formule plus complète des gaz réels. Il démontre qu'au-dessous de l'atmosphère visible il se produit brusquement un accroissement de densité, ce qui forme un véritable noyau, sensiblement homogène, qui se comporte comme un liquide et dont la température ne dépasse pas le triple de la température superficielle. L'application des lois de l'énergie et du rayonnement au Soleil ainsi constitué, permet de déterminer le temps et la température de sa formation et de son évolution, ainsi que l'évolution correspondante de la Terre.

2 et 3. — M. Navelle présente deux études : *Considérations sur les Sciences dites subjectives,* et *Sur l'esprit de Système.*

4. — M. Véronnet présente une note de M. Fréchet, de Strasbourg, *Sur une nouvelle extension du théorème de Borel-Lebesgue.* — Le théorème de Borel-Lebesgue relatif aux ensembles linéaires avait été étendu dans ma thèse aux classes (D). M. R.-L. Moore l'a ensuite généralisé pour la classe (φ). M. Fréchet l'étend dans sa note aux classes plus grandes encore qu'il a appelées ailleurs classes (H).

5. — M. A. Gérardin présente une communication de M. Ernest Lebon, de Paris, *Sur la Table des caractéristiques,* en rappelant

ses beaux travaux précédents sur le même sujet. — « Dans une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences, le 6 mars 1916, (*Comptes rendus*, t. 164, p. 482), j'ai montré que, si la formule

$$K = I'\varkappa + k$$

donne une valeur de K supérieure à 30 029, on applique, lorsqu'on n'a pas la Table des Caractéristiques $K > 30\,029$, le théorème suivant :

« Ayant un nombre $BK + 1$, K étant compris entre B et B^2, lorsque le quotient q et le reste r, obtenus en divisant K par B, sont tels que q puisse se décomposer en deux facteurs K_1 et K_2 dont la somme égale r, le nombre $BK + 1$ est le produit de deux nombres $BK_1 + 1$ et $BK_2 + 1$ de la Table des Caractéristiques $K < 30\,030$.

« Dans la Note que je rédigerai, je montrerai comment on trouve les couples de caractéristiques K_1 et K_2 où $K_1 . K_2 = q$ et $K_1 + K_2 = r$. »

6. — De M. R. Goormaghtigh, de la Louvière (Belgique) : *Sur une nouvelle direction fixe associée aux hélices cylindriques.* — Soit une hélice de cylindre caractérisée par la relation $\tau = a\varrho$ entre ses rayons ϱ et τ de courbure et de torsion ; on peut lui associer une première direction fixe remarquable, celle des génératrices du cylindre. Mais il existe une autre direction remarquable, associée à l'hélice, et sur laquelle on n'a pas — croyons-nous — attiré jusqu'ici l'attention. On a, en effet, le théorème suivant :

Etant donnée une hélice, il existe une direction fixe parallèlement à laquelle on peut mener, à partir de chaque point de la courbe, un segment égal à l'arc en ce point, et telle que le lieu des extrémités de ces segments soit une courbe plane.

Si l'on pose

$$\varphi = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \int_0^s \frac{ds}{\rho},$$

les cosinus directeurs de cette direction par rapport à la tangente, la binormale et la normale principale en un point de la courbe, caractérisé par la valeur s de l'arc, sont

$$\alpha = \frac{a^2 \sin\varphi - 1}{a^2+1}, \qquad \beta = \frac{a(\sin\varphi + 1)}{a^2+1}, \qquad \gamma = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{a^2+1}}.$$

7. — De M. R. Goormaghtigh, *Sur la courbure des courbes exponentielles triangulaires.* — Dans un système de coordonnées

triangulaires projectives ξ_1, ξ_2, ξ_3, dont Ω est le pôle (1, 1, 1), nous considérons la courbe

$$\alpha_1 e^{n\xi_1} + \alpha_2 e^{n\xi_2} + \alpha_3 e^{n\xi_3} = 0 \;;$$

α_1, α_2, α_3 désignent des constantes, n est l'*indice* de la courbe, et e la base des logarithmes népériens.

On montre d'abord aisément que toutes les courbes correspondant à un même indice n et à des valeurs différentes de α_1, α_2. α_3 peuvent s'obtenir par la translation d'une même courbe.

La propriété remarquable de la courbure est la suivante :

La courbure d'une courbe exponentielle triangulaire en l'un quelconque de ses points vaut n *fois celle de la conique, conjuguée au triangle, qui passe par le pôle* Ω *et y a sa tangente parallèle à celle de la courbe exponentielle au point considéré.*

On déduit de là que *la radiale d'une courbe exponentielle triangulaire est une cubique* et, qu'en particulier, *la trisectrice de G. de Longchamps est la radiale de la courbe représentée, dans un triangle de référence équilatéral, par l'équation barycentrique*

$$e^{\mu_1} + e^{\mu_2} + e^{\mu_3} = 0 \;.$$

8. — M. A. Gérardin présente ensuite un mémoire de M. Léon Aubry, de Jouy-les-Reims, *Sur une erreur de Dirichlet. Son théorème sur la progression arithmétique n'est pas démontré.* — Ce théorème : «Toute progression arithmétique dont le 1er terme et la raison sont premiers entre eux, contient une infinité de nombres premiers» se trouve *Journal de Liouville*, t. 4, 1839, p. 393-422. Dirichlet prouve bien d'abord que pour $s > 1$ et seulement > 1, à cause de la convergence de la série

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{h^s} + \dots$$

on a l'équation

$$\Pi \frac{1}{1 - \omega^\gamma \frac{1}{q^s}} = \Sigma \omega^\gamma \frac{1}{n^s} = \mathrm{L} \qquad (1)$$

mais ensuite il admet (loc. cit., p. 408 et 411) que pour la valeur de s choisie dans sa démonstration on a log. $\mathrm{L}_0 = \infty$; or si l'on a log. $\mathrm{L}_0 = \infty$, on a à beaucoup plus forte raison $\mathrm{L}_0 = \infty$ et comme par construction $\mathrm{L}_0 < \zeta(s)$, on a encore à plus forte raison la série $\zeta(s) = \infty$ et non convergente pour cette valeur de s; donc, la démonstration de (1), basée sur la convergence de $\zeta(s)$ ne s'applique pas pour cette valeur de s et n'est pas concluante.

9, 10, 11. — M. A. Gérardin, de Nancy, présente trois Notes : *Résultats acquis depuis 1912 avec les machines à congruences A. Gérardin. Modèle de démonstration.* — Un très grand nombre de problèmes d'arithmétique supérieure sont résolus par la solution en nombres entiers d'équations de la forme

$$ax^2 + bx + c = y^2 .$$

J'ai fait, à propos de mes machines, diverses communications importantes aux divers congrès précédents, français et étrangers. J'ai donné la théorie complète dès 1906, et ensuite la pratique à l'aide de mes machines à congruences, fonctionnant depuis les premiers mois de 1912 (les premières tant en France qu'à l'étranger).

Basées sur une mosaïque théorique et pratique très simple, la solution est acquise, automatiquement, par une colonne entièrement blanche, dès que toutes les conditions sont réalisées. Elles travaillent à raison de 200 résidus par seconde, et l'une d'entre elles fournit la liste indéfinie des nombres premiers.

Résultats acquis : Plus de six mille équations étudiées et complètement résolues, etc.

Un congressiste propose $3x^2 - 7x - 2 = y^2$. La mosaïque immédiatement établie donne les solutions

$$x = 3,\ 6,\ 22,\ 67,\ 291,\ 918,\ \ldots$$

$$y = 2,\ 8,\ 36,\ 114,\ 502,\ 1588,\ \ldots$$

que l'on obtient aussi en partant de la solution initiale $-x = \frac{1}{2}$ et utilisant la méthode universelle de l'auteur.

Méthode inédite de découverte des facteurs d'un nombre composé de grandeur quelconque. Exemples simples. — Comme suite aux remarquables travaux d'Ed. Lucas sur la « primalité », j'ai trouvé une méthode pour la « factorisation ». Elle ouvre des aperçus si nouveaux sur les procédés à employer pour trouver rapidement les facteurs de nombres de certaines formes, par exemple, qu'on ne pourra se rendre compte que plus tard du nombre des théorèmes ainsi découverts. Il y a des questions de limite.

La forme $M = 2a^2 - 1$ ne donne que des nombres composés pour $a = 9$, 89, 881, etc. ; les M et les a me sont donnés par des séries récurrentes faciles, les facteurs se lisent immédiatement. La méthode donne au premier essai l'identité des nombres d'Euler, Aurifeuille, Sophie Germain et d'innombrables et curieuses séries dont les premiers éléments peuvent être fournis par les machines à congruences de l'auteur.

Méthode inédite donnant la solution minima de $x^2 - Ay^2 = +1$, *et équations analogues.* — J'ai annoncé en 1917 cette méthode dans l'*Enseignement mathématique* et dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens.* En 1912, Whitford avait publié la bibliographie de cette question classique (comme thèse avec ses travaux personnels), donnant en 80 pages de texte la liste des 300 mathématiciens qui avaient étudié le problème. Le volume 2 de l'*Histoire de la théorie des Nombres* de M. L. E. Dickson, qui va paraître, en donnera le résumé.

La méthode des fractions continues est impraticable. Ma méthode utilisant des « équations doubles » est facile et extrêmement féconde car la solution minima, qui peut être donnée par mes machines à congruences fournissant une solution du présent problème, en donne une infinité pour des séries factorisables et pour des séries récurrentes. De nombreux exemples inédits sont montrés.

Ces trois méthodes juxtaposées donnent des instruments de travail très précieux pour les recherches difficiles, en nombres entiers, de la Théorie des Nombres.

12. — M. A. Gérardin parle enfin de ses *Jeux scientifiques inédits A.-G., sur les nombres entiers (Drapeau du Japon, Jeu de Paille-Maille, le Cache-Cache, etc.).* — Je ne parlerai ici que de certains jeux formant une suite naturelle aux jeux d'Ed. Lucas, un des ancêtres de l'Association française pour l'Avancement des Sciences. Le « Gaulois », l'« Abricot », le « Drapeau du Japon » sont des « types » de jeux où l'on devine, par juxtaposition de cartons perforés d'après certaines lois mathématiques, soit une lettre, un mot ou un nombre pensé.

Le « Cache-Cache » et le « Paille-Maille » répondent aux mêmes conditions, mais donnent de plus des mots français à lettres ou à syllabes permutables.

Une dernière série de « jeux de cartes » a été indiquée, pour « prises de dates », pendant la guerre. Notre premier envoi de trois jeux, rédigé aux armées, a obtenu une médaille de vermeil au Concours Lépine de 1916.

13. — M. Millon : *Sur le calcul de l'âge des astres.*

14. — M. H. Muller, de Grenoble : *Le Cadran solaire du Lycée de filles de Grenoble.* — Le cadran solaire du Lycée de filles de Grenoble, dessiné en 1673, par un Jésuite, le R. P. Bonfa, est peu connu. Il vient d'être classé (mars 1920) comme monument historique.

Le cadran donne les heures françaises en noir, les heures italiques en rouge, les heures babyloniques en jaune. Des arcs d'hyperbole indiquent les signes du zodiaque; les saisons et les mois sont aussi indiqués.

On y voit encore les calendriers de la Société de Jésus, de la Vierge et du Roi ; les heures du lever et coucher du soleil et celles des crépuscules ; les maisons célestes et une table des épactes. Le calendrier civil de la lune permet de calculer rapidement l'âge de cet astre et enfin, l'Horloge nouvelle, œuvre peut-être unique, donne « *la situation de la lune par le soleil, celle du soleil par la lune et, pour l'un et pour l'autre, les jours de la lune dans le monde entier* ».

Le cadran du Lycée de filles de Grenoble couvre environ *cent mètres carrés* de surface. Des plans permettent de se rendre compte de l'importance de ce travail.

15. — M. René Thiry, de Strasbourg, présente une Note : *Sur un point particulier de la théorie des tourbillons.* — Sa communication a pour but d'étudier une contradiction relevée par M. J. Weingarten entre ses résultats et ceux des géomètres anglais sur un point de la théorie des mouvements d'un anneau de tourbillon circulaire infiniment mince dans un liquide incompressible, au repos à l'infini. On trouve que la vitesse de translation de l'anneau est infiniment grande par rapport à celle des particules centrales, et M. Weingarten trouvait pour la partie principale de cette vitesse une valeur double de celle des auteurs anglais. La note conclut à l'exactitude de cette dernière valeur, tout en conservant la validité des autres résultats de M. Weingarten.

16. — M. A. Gérardin présente le fort intéressant volume de MM. H. Brocard et T. Lemoyne : *Courbes géométriques remarquables (courbes spéciales) planes et gauches,* en rappelant les beaux comptes rendus de M. Buhl *(Ens. Math.)* et M. Bricard *(Nouv. Ann. Math.)*.

17. — M. Esclangon : *Sur l'organisation des études astronomiques à l'Observatoire de Strasbourg.* — Visite de l'Observatoire par les congressistes, exposé des remaniements importants en voie d'exécution, et des intéressants projets en vue.

M. A. Gérardin présente enfin les six communications suivantes :

18. — C. Clapier, *Sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante.*

19. — Salmin, *Le flambage des poteaux en treillis chargés en bout.*

20. — Cdt. Litre, *Sur la loi des aires établie à posteriori.*

21. — H. Tripier, *Sur l'application de la méthode des approximations successives à la résolution des équations numériques.*

22. — G. David, à Auxerre, *Sur les sphères inscrites et circonscrites au dodécaèdre et à l'icosaèdre.*

23. — Delaporte (Ligue Chronos, Paris), *Sur la réforme du calendrier*.

Le prochain congrès doit se tenir à *Rouen*. Le président de section sera M. Lelieuvre, le secrétaire M. A. Gérardin.

Société mathématique suisse.

Neuchâtel, 31 août 1920.

La Société mathématique suisse a tenu sa dixième réunion ordinaire à Neuchâtel, le 31 août 1920, sous la présidence de M. le Prof. Louis Crelier (Berne), à l'occasion de la cent-unième assemblée annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles. Le programme de la partie scientifique comprenait douze communications. En voici les résumés.

1. — Dr Ch. Willigens (Berne). — *Sur l'interprétation du temps universel dans la théorie de la relativité.* — Si dans la transformation de Lorentz

$$x = \beta(x' + \alpha u') , \qquad u = \beta(u' + \alpha x') , \qquad y = y' , \qquad z = z' ,$$

où

$$u = c_0 t , \qquad u' = c_0 t' ; \qquad \alpha c_0 = v , \qquad \beta^2 = \frac{1}{1 - \alpha^2} ,$$

c_0 désignant la vitesse de la lumière, on pose

$$u = ct + r \qquad u' = c't - r$$

on arrive, tout calcul fait[1], aux relations

$$x = x' + vt \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} c_0 \tau &= \frac{c_0}{\beta} t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x = c_0 t + \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x' \\ c_0 \tau' &= c_0 t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x = \frac{c_0}{\beta} t - \frac{\beta - 1}{\alpha\beta} x' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Supposons l'observateur placé sur S. Comme tous les points de S' sont au repos, on a

$$\Delta x' = 0 \qquad \Delta\tau = \Delta t . \tag{3}$$

Les horloges marchent donc toutes également vite. Les for-

[1] Ch. Willigens. Interprétation géométrique du temps universel dans la théorie de la relativité restreinte. *Archives des sciences physiques et naturelles*, 5e période, vol. 2, juillet-août 1920.

mules (2) mettent en évidence le caractère de la relativité, à savoir un déphasage par rapport à l'horloge locale de l'observateur. En outre, il résulte de (3) que ce mode de mesure du temps doit conduire aux mêmes équations différentielles que si l'on introduit le paramètre t.

Les relations (2), linéaires en x, x', τ, τ' et t représentent des droites dans les diagrammes de Minkowski. Ce sont des droites de simultanéité absolue. L'auteur s'est proposé d'étudier l'ensemble formé par ces droites, lorsque la vitesse v de S′ prend toutes les valeurs possibles. Il est commode d'introduire des imaginaires en posant

$$\alpha = ia \qquad c_0 = -i\overline{c_0} \qquad b = \frac{1}{1+a^2} \qquad \frac{1-b}{ab} = m = \operatorname{tg}\varphi$$

$b = \cos 2\varphi$.

La transformation de Lorentz représente la rotation du système d'axes $(x, \overline{c_0\tau})$ d'un angle 2φ autour de l'origine. La première relation (2) prend la forme

$$\overline{c_0}\tau = mx + \overline{c_0}\,t\frac{1+m^2}{1-m^2}$$

représentant une parallèle à la bissectrice de xOx'. Supposons t constant et faisons varier m. La droite enveloppe une courbe définie par les relations :

$$x = \overline{c_0}\,t\frac{-4m}{(1-m^2)^2}\,, \qquad \overline{c_0}\tau = c_0\,t\frac{1-4m^2-m^4}{(1-m^2)^2}\,.$$

Si t varie on obtient des courbes homothétiques par rapport à l'origine, le rapport d'homothétie étant t. Pour un système S′ donné on aura les droites de simultanéité en menant à ces courbes les tangentes parallèles à la bissectrice de xOx'. On n'a qu'une seule de ces tangentes par courbe.

Si on n'introduit pas les imaginaires, les axes Ox' et Ou' sont conjugués par rapport aux hyperboles équilatères :

$$x^2 - u^2 = 1\,, \qquad x^2 - u^2 = -1\,.$$

Les droites de simultanéité sont représentées par une relation de la forme :

$$c_0\tau = \mu x + c_0\,t\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \qquad \mu = \frac{\beta - 1}{\alpha\beta}$$

elles sont parallèles à la droite joignant les points d'intersection de Ou et Ou' avec l'une des hyperboles et ont pour enveloppe

$$x = c_0\,t\frac{4\mu}{(1+\mu^2)^2}\,, \qquad c_0\tau = c_0\,t\frac{1+4\mu^2-\mu^4}{(1+\mu^2)^2}\,.$$

Ce sont des hypocycloïdes à trois rebroussements homothétiques par rapport à l'origine, t étant rapport d'homothétie.

On voit que t est indépendant de α, et que seules les droites de simultanéité en dépendent.

En particulier, si $\alpha = 0$ on a $m = \mu = 0$. $t = \tau$. Les valeurs de t sont donc identiques aux valeurs de τ quand on ne s'occupe pas du système S'.

2. — Prof. G. Pólya (Zurich). — *Sur les fonctions entières.* — Soit $g(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ une fonction entière,

$M(r)$ le maximum de $|g(z)|$ dans le cercle $|z| \leqq r$,

$N(r)$ le nombre de zéros de $g(z)$ dans le même cercle,

$n(r)$ l'indice du plus grand des termes $|a_0|$, $|a_1|r$, $|a_2|r^2$, ...

$\Lambda = \overline{\lim\limits_{r=\infty}} \dfrac{\lg \lg M(r)}{\lg r}$ l'ordre apparent de $g(z)$.

I. D'un théorème général sur les suites infinies découlent les inégalités suivantes

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r)}{\lg M(r)} \leqq \Lambda \leqq \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r)}{\lg M(r)} , \tag{1}$$

$$\underline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r)}{\lg M(r)} \leqq \Lambda . \tag{2}$$

Il existe une fonction $\varphi(\Lambda)$ s'annulant pour $\Lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$, positive, quand Λ n'est pas entier, et telle que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{N(r)}{\lg M(r)} \geqq \varphi(\Lambda) . \tag{3}$$

On a

$$\varphi(\Lambda) = \frac{\sin \pi\Lambda}{\pi} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \Lambda \leqq 1$$

$$\frac{1}{\varphi(\Lambda)} = \frac{\Lambda\, 2^{1-\Lambda}}{(2-\Lambda)(\Lambda-1)} + \int_0^1 \frac{x^{\Lambda-1}\, dx}{(1+x)^\Lambda} , \qquad \text{pour} \quad 1 < \Lambda < 2$$

Les inégalités données ne sauraient être resserrées davantage, le signe $=$ étant valable pour certaines fonctions particulières. Par exemple, les inégalités (2) et (3) se changent en égalités pour $\sigma(z)$ respectivement pour $\xi(\sqrt{z})$; $\sigma(z)$ désigne la fonction de *Weierstrass*, un carré étant pris comme parallélogramme des périodes, $\xi(z)$ désigne la fonction de *Riemann*.

II. Si $\left|\dfrac{a_1}{a_0}\right|^2 + \left|\dfrac{a_2}{a_1}\right|^2 + \dots + \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|^2 + \dots$ converge, le genre de $g(z)$ est 0 ou 1. La démonstration de cette proposition se base sur un théorème d'algèbre de M. *J. Schur*. Une autre démonstration se basant sur des considérations moins particulières serait désirable, parce qu'elle devrait probablement s'écarter des méthodes usuelles.

3. — Prof. L. LICHTENSTEIN. (Berlin). — *Sur les problèmes mathématiques concernant la forme des corps célestes.* — Le problème de la forme des corps célestes a, depuis la découverte du calcul infinitésimal, occupé nombre de mathématiciens éminents, au XVIIIe siècle *Mac Laurin, D'Alembert, Clairaut, Legendre* et, surtout, *Laplace* qui consacra à cet objet le tome II de sa « Mécanique céleste ». Au XIXe siècle, des recherches de *Dirichlet, Jacobi, Liouville* et *Riemann* sur la figure ellipsoïdique d'un fluide tout d'abord, puis surtout, des travaux de *Poincaré* (1885) et de *Liapounoff* (1884) amenèrent un nouveau progrès.

Dans un travail connu des Acta matematica (1885) Poincaré énonce le théorème suivant : Soit T une figure d'équilibre d'un fluide homogène tournant avec la vitesse angulaire ω. En général à toute valeur voisine de ω, disons $\omega + \Delta\omega$, correspond une figure d'équilibre T_1 voisine de T. Dans certains cas cependant à $\omega + \Delta\omega$ peuvent correspondre plusieurs ou aucune figure T_1. ($\Delta\omega > 0$ ou $\Delta\omega < 0$). En T se présente une « bifurcation de la figure d'équilibre ». La démonstration que donne Poincaré de ses théorèmes fondamentaux n'a guère qu'une valeur heuristique. Dans le cas spécial des ellipsoïdes de *Mac Laurin* et de *Jacobi*, la démonstration complète a été donnée par *Liapounoff* dans une suite de travaux fondamentaux, qui parurent entre 1903 et 1916. Les travaux de Liapounoff contenaient en outre la solution complète du problème de la stabilité dans sa forme ordinaire, de même que de nombreuses considérations accessoires — tout cela pour les ellipsoïdes fluides.

Dans deux travaux parus dernièrement, [Mathematische Zeitschrift Bd 1 (1918) et Bd 7 (1920)] j'ai, entre autres choses, démontré les théorèmes de Poincaré pour une figure d'équilibre quelconque. La méthode de démonstration représente, en partie, une généralisation et une simplification de la méthode de Liapounoff; d'autre part, elle introduit plusieurs points de vue nouveaux, en particulier quant à la théorie du potentiel. Les moyens dont on dispose dès lors permettent d'obtenir la solution exacte d'un grand nombre de problèmes classiques. On peut considérer la confirmation de la Théorie de Laplace concernant l'anneau de Saturne comme le plus important de ces résultats. Laplace le premier a étudié les figures d'équilibres possibles d'un anneau fluide tournant autour d'un axe, et trouvé que sa section, en première approximation, est elliptique. Plus tard, Madame S. Kowalewsky a poussé l'approximation un pas plus loin. L'existence de figures d'équilibres en anneau est aussi peu prouvée par ces travaux que par ceux postérieurs de Poincaré.

Comme autre résultat, nous citerons la confirmation de la théorie de la Lune, de Laplace.

On peut admettre qu'il serait maintenant aussi possible de traiter, entre autres et de façon relativement simple, des anneaux qui ne soient pas nécessairement homogènes, en particulier des anneaux gazeux.

4. — Prof. L. G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur les idéaux de nombres hypercomplexes.* — En cherchant à étendre à tous les systèmes de nombres complexes les propriétés des nombres entiers, comme Gauss l'avait fait avec un plein succès pour les nombres complexes ordinaires, les géomètres découvrirent que certains systèmes ne se prêtent pas à cette généralisation. Par exemple, la décomposition d'un nombre complexe entier en facteurs premiers, décomposition toujours possible, n'est pas toujours univoque. Il en résulte qu'un produit peut être divisible par un nombre entier sans qu'aucun des facteurs ne le soit, et quantité d'autres irrégularités. La théorie des idéaux, comme on le sait, fait tomber ces anomalies par un ingénieux changement de méthode. En faisant intervenir des idéaux de nombres, c'est-à-dire certains ensembles de nombres entiers, à propriétés caractéristiques bien déterminées, au lieu d'opérer sur les nombres considérés isolément, Dedekind réussit à rétablir la simplicité arithnomique qui se manifeste dans l'arithmétique ordinaire. — Le domaine où la théorie des idéaux est applicable avec succès embrasse tous les corps de nombres algébriques dont on s'est occupé jusqu'ici : d'une part, les systèmes où se maintient l'ancienne théorie des nombres, qui ne fait pas intervenir le concept d'idéal, d'autre part une infinité de systèmes où cette ancienne arithmétique n'est pas valable. Aussi croyait-on la théorie des idéaux d'une efficacité absolue, lorsqu'il s'agissait d'obtenir une arithnomie régulière. Or, il existe des systèmes de nombres complexes à multiplication associative, distributive et commutative, et contenant les nombres réels comme sous-groupe, où même la théorie des idéaux ne conduit pas à une arithmétique simple comparable à la classique. — Soit, dans l'un de ces systèmes, a un idéal non principal. Il peut arriver que la série de ses puissances successives

$$a, a^2, a^3, \ldots\ldots, a^n, \ldots\ldots \quad ad\ infin.$$

ne contienne aucun idéal principal. L'un des fondements de la théorie de Dedekind est ainsi détruit. Le conférencier indique le système le plus simple possible de nombres complexes où cela se produit, et termine sa communication en signalant quelques problèmes nouveaux qui surgissent de ce fait dans le domaine des nombres complexes généraux.

5. — Dr G. Tiercy (Genève). — *Une nouvelle propriété des courbes orbiformes.* — *1.* On appelle *orbiformes* des courbes fermées convexes, de largeur constante. Leur équation polaire tangentielle s'écrit :

$$p(\omega) = a[1 + f(\omega)] \ , \qquad \text{avec} \qquad f(\omega + \pi) = - f(\omega) \ .$$

Considérons un point M de contact se mouvant sur une orbiforme, de telle manière que l'angle polaire tangentiel augmente proportionnellement au temps : $\omega = \theta t + \omega_0$; la projection P du point M sur un axe est animée d'un mouvement oscillatoire, auquel nous donnerons le nom de *mouvement harmonique d'orbiforme.*

2. Considérons plusieurs mouvements harmoniques d'orbiformes, d'amplitude a_i différentes, d'époques tangentielles ε_i différentes, mais de même période tangentielle :

$$p_i = a_i[1 + f_i(\omega_i)] \ , \qquad \omega_i = \omega + \varepsilon_i \ .$$

Composons les normales p_i; soient $\overline{OS}$ la résultante, $\overline{OR}$ sa projection sur l'axe des x, et $\overline{ON}$ sa projection sur l'axe des y.

Puis, donnons à ω un accroissement π; et composons les nouveaux rayons vecteurs tangentiels $p_i(\omega_i + \pi)$; soient $\overline{OS'}$ la résultante, $\overline{OR'}$ et $\overline{ON'}$ ses projections sur les axes de coordonnées.

En posant :

$$\Sigma a_i \cos \varepsilon_i = A \cos \varepsilon \ , \qquad \Sigma a_i \sin \varepsilon_i = A \sin \varepsilon \ ,$$

on obtient :

$$\overline{R'R} = 2A \cos(\omega + \varepsilon) \ , \qquad \overline{N'N} = 2A \sin(\omega + \varepsilon) \ .$$

On trouve donc la propriété que voici : *le segment de droite* $\overline{SS'}$ *est de longueur constante égale à* 2A ; *et l'angle qui l'oriente présente une différence constante* $(\varepsilon - \varepsilon_i)$ *avec chacune des phases* ω_i.

D'ailleurs, le rayon vecteur tangentiel $\overline{OS}$ ne définit pas une orbiforme.

3. On trouve facilement que la distance de l'origine à la droite $\overline{SS'}$ vaut :

$$P(\omega) = \Sigma a_i[1 + f_i] \sin(\varepsilon - \varepsilon_i) \ ;$$

or il vient :

$$P(\omega) + P(\omega + \pi) = 0 \ .$$

La courbe enveloppe de la droite $\overline{SS'}$ *est donc une courbe d'envergure nulle,* c'est-à-dire n'admettant qu'une seule et unique tangente parallèle à une direction donnée.

Par conséquent, les courbes convexes parallèles à la courbe $P(\omega)$, et les développantes convexes de cette même courbe, seront de nouvelles orbiformes.

4. Dans le cas où les ε_i sont égaux, les rayons p_i sont portés par la même droite ; alors :

$$P(\omega) = 0 \ ,$$

et *la résultante* $\overline{OS}$ *des rayons* p_i *définit directement une nouvelle orbiforme, de largeur* $2A = 2\Sigma a_i$.

Si P est le point animé du mouvement harmonique d'orbiforme final, et si P_i sont les points animés des mouvements harmoniques donnés, on a en outre :

$$\overline{OP} = \Sigma \overline{OP}_i \ .$$

On remarquera que l'énoncé de ce théorème est identique à celui de la loi de Fresnel, donnant la composition de plusieurs mouvements harmoniques simples de même période.

6. — Emch (Urbana, U. S. A.). — *Sur les incidences de droites et de courbes algébriques planes dans l'espace et les surfaces qui en résultent.* — Lüroth[1] a traité des problèmes de cette sorte pour le cas le plus simple des sections coniques. Par l'emploi systématique de formules d'incidence, sous une forme élégante, Emch réussit à obtenir, non seulement tous les résultats de Lüroth, mais des résultats généraux pour les courbes de n^{me} ordre, par une méthode analytique relativement simple. Voici quelques-uns de ses principaux résultats :

1. *Le système de plans, tels que chacun coupe* $\frac{n(n+3)}{2}+1$ *droites indépendantes dans l'espace en des points situés sur une courbe du* n^{me} *ordre est une surface de la classe* $\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$.

2. *Les courbes planes de* n^{me} *ordre, dont les plans passent par une droite fixe et qui coupent* $\frac{n(n+3)}{2}$ *droites indépendantes dans l'espace, engendrent une surface d'ordre* $\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$.

3. *Les courbes planes de* n^{me} *ordre qui coupent* $\frac{n(n+3)}{2}+2$

[1] Sur le nombre des coniques qui coupent 8 droites dans l'espace. *Journ. de Crelle*, p. 185-192 (1868).

droites indépendantes dans l'espace, chacune en un point simple, forment une surface développable de la classe

$$\frac{n^2(2n^4 + 12n^3 + 17n^2 - 3n + 8)}{18} .$$

4. *Etant données* $\frac{n(n+3)}{2} + 3$ *droites indépendantes dans l'espace, il existe*

$$\frac{n^3(n^2 + 3n + 2)(n^4 + 6n^3 + 4n^2 - 15n + 4)}{27}$$

courbes de n^{me} *ordre coupant chacune de ces droites. Dans le cas* $n = 2$ *(Lüroth) ce nombre est* 92.

5. *Soient les courbes planes de* n^{me} *ordre qui coupent une courbe plane donnée de* n^{me} *ordre en* n *points et* $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ *droites indépendantes dans l'espace; les plans de ces courbes forment une surface de la classe* $\frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}$.

6. *Même énoncé que le précédent avec* $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ *droites indépendantes dans l'espace; la surface est développable et de la classe* $\frac{n^2(4n^4 + 12n^3 + 19n^2 + 24n + 49)}{36}$.

7. *Il existe*

$$\frac{n^3(8n^6 + 36n^5 + 66n^4 + 99n^3 + 123n^2 + 89n + 343)}{216}$$

courbes planes de n^{me} *ordre, qui coupent une courbe plane donnée de* n^{me} *ordre en* n *points et* $\frac{n(n+1)}{2} + 3$ *droites indépendantes dans l'espace.*

En particulier :

8. *Il existe* 175 *cercles coupant* 6 *droites indépendantes dans l'espace.*

7. — Prof. F. Gonseth (Berne). — *Sur une application de l'équation de Fredholm.* — Il s'agit de la détermination d'une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + l(x)y = m(x)$$

lorsque la fonction inconnue doit, pour n valeurs données de x, prendre n valeurs données d'avance.

La méthode générale est exposée sur l'équation du 3e ordre :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = d \tag{1}$$

y prenant les valeurs y_1, y_2, y_3 pour $x = x_1, x_2, x_3$.

On considère l'expression

$$y = \int_{x_1}^{x_3} A(xs)f(s)\,ds + V(x) \tag{2}$$

où la fonction $A(xs)$, en général continue, a pour $s = x$ une discontinuité $\alpha(x)$. De même $\frac{\partial A(xs)}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 A(xs)}{\partial x^2}$ présentent au même endroit les discontinuités $\beta(x)$ et $\gamma(x)$.

Quant à la 3e dérivée partielle, elle est supposée identiquement nulle.

Dans ces conditions, $A(xs)$ est de la forme

$$\begin{array}{ll} l_1(x-s)^2 + m_1(x-s) + n_1 & \text{pour} \quad s \leqq x \\ l_2(x-s)^2 + m_2(x-s) + n_2 & \text{pour} \quad s > x \end{array}$$

l_1, m_1, n_1; l_2, m_2 et n_2 étant des fonctions arbitraires de s, dont seules les différences $l_2 - l_1 = \frac{\gamma(s)}{2}$ ... etc., joueront un rôle dans la suite.

Dérivons l'équation (1) trois fois de suite : nous obtenons

$$y''' + \alpha(x)f''(x) + [\beta(x) + 2\alpha'(x)]f'(x) + [\gamma(x) + \beta'(x) + \gamma''(x)]f(x)$$
$$= V'''(x)$$

que nous identifions avec

$$y''' + a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) = d(x)\ .$$

Les a, b, c déterminent $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\gamma(x)$; quant à $V(x)$ on peut lui ajouter sans rien modifier à la dernière équation, une fonction arbitraire dont la dérivée troisième soit nulle. Nous remplaçons donc (2) par :

$$y = \int_{x_1}^{x_3} A(xs)f(s)\,ds + C_1(x-x_2)(x-x_3) + C_2(x-x_3)(x-x_1)$$
$$+ C_3(x-x_1)(x-x_2) + V(x) \tag{4}$$

exprimant que pour $x = x_1, x_2, x_3$, y prend des valeurs déterminées, on calcule C_1, C_2 et C_3. Ceux-ci étant introduits, l'équation (4) prend la forme :

$$y = \int_{x_1}^{x_3} \overline{\mathrm{A}(xs)}\, f(s)\, d(s) + \overline{\mathrm{V}(x)} \;;$$

et la fonction f ne joue aucun rôle dans $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{V}}$. Nous avons donc la possibilité de remplacer f par y et l'équation de Fredholm

$$y(x) = \int_{x_1}^{x_3} \overline{\mathrm{A}(xs)}\, y(s)\, ds + \overline{\mathrm{V}(x)}$$

résout la question.

La méthode est susceptible de diverses généralisations.

8. — Prof. C. Cailler (Genève). — *Sur un théorème relatif à la série hypergéométrique et sur la série de Kummer.* — L'auteur donne diverses généralisations de la formule, obtenue par lui, il y a quelques années

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,xz)\,\mathrm{F}[\alpha',\beta',\gamma',y(1-z)]\,dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!}(1-y)^{\alpha-\beta'}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma+\gamma',x+y-xy)$$

laquelle a lieu sous réserve des conditions

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' \,.$$

Parmi ces extensions citons la suivante

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}\,\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,xz)\,\mathrm{F}(\alpha',\beta',\gamma',1-z)\,dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!\,(\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta'-1)!}{(\gamma+\gamma'-\alpha'-1)!\,(\gamma+\gamma'-\beta'-1)!}\,\mathrm{F}(\gamma+\gamma'-\alpha'-\beta',\alpha,\gamma+\gamma'-\alpha';x)\,,$$

qui a lieu moyennant la relation $\beta + \beta' = \gamma + \gamma'$, et

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\gamma'-1}\,\mathrm{F}(\alpha,\gamma;xz)\,\mathrm{F}[\alpha',\gamma';y(1-z)]\,dz$$

$$= \frac{(\gamma-1)!\,(\gamma'-1)!}{(\gamma+\gamma'-1)!}\,e^x\,\mathrm{F}(\alpha',\gamma+\gamma';y-x) \,.$$

Dans cette dernière, F est la fonction de Kummer

$$F(\alpha, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha + 1)x^2}{\gamma(\gamma + 1)2!} + \cdots$$

9. — Prof. C. Cailler (Genève). — *Sur un théorème de cinématique.* — M. C. Cailler rappelle d'abord les définitions classiques pour la vitesse d'un point, d'un plan et d'une droite. Cette dernière est une quantité *complexe* formée à l'aide d'une unité ε telle que $\varepsilon^2 = 0$.

Une droite *appartient* à un axe α lorsqu'elle rencontre l'axe sous un angle droit, un point et un plan *appartiennent* au même axe s'ils y sont contenus.

Ces définitions étant admises, imaginons qu'un point p, un plan ϖ, une droite δ fassent partie d'un solide, tandis que l'axe α auquel ils appartiennent soit fixe dans l'espace.

Nous avons alors le théorème suivant, en quatre parties, dont seule la première est classique.

1° La projection sur α de la vitesse d'un point p, appartenant à α, est la même quel que soit ce point. Soit g'' cette projection constante.

2° La projection sur α de la vitesse angulaire d'un plan appartenant à α est la même quel que soit ce plan. Soit g' cette projection constante.

3° La projection sur α de la vitesse linéaire d'une droite appartenant à α est la même, quelle que soit la droite. Soit g cette projection constante.

4° Entre les trois quantités g, g', g'', dont la première est complexe et les autres réelles, existe la relation

$$g = g' + \varepsilon g'' .$$

10. — Prof. Michel Plancherel (Fribourg) et Edwin Strässle (Stans). — *Sur l'intégrale de Poisson pour la sphère.* — L'intégrale de Poisson

$$U(r, \vartheta, \Phi) = \frac{1}{4\pi} \int_S u(\vartheta', \varphi') \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \omega + r^2} d\sigma'$$

définit, lorsque $u(\vartheta, \varphi)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur la surface sphérique S de rayon 1, une fonction harmonique à l'intérieur de S et l'on sait que $U(r, \vartheta, \varphi) \to u(\vartheta, \varphi)$ presque partout, lorsque $r \to 1$, en particulier aux points de continuité de $u(\vartheta, \Phi)$.

Il ne semble pas que l'étude de la limite pour $r \to 1$ des dérivées $D_{p+q} U(r, \vartheta, \Phi) = \dfrac{\partial^{p+q} U}{\partial \vartheta^p \, \partial \varphi^q}$ ait été faite. La méthode employée par

M. de la Vallée Poussin dans le cas du cercle ne peut être utilisée sur la sphère. On peut, il est vrai, étudier ces dérivées par une méthode directe ; malheureusement les calculs deviennent immédiatement très longs et la méthode ne semble applicable avec succès que pour les petites valeurs de $p + q$. Cette méthode a cependant l'avantage de conduire à des résultats très généraux dans lesquels interviennent les dérivées généralisées de u.

Une méthode plus simple repose sur la remarque suivante : Si dans un domaine Σ de S, u est une fonction analytique du point (ϑ, φ), $U(r, \vartheta, \varphi)$ est prolongeable analytiquement à travers Σ. De cette remarque, à conclure que dans le cas particulier où u est analytique, on a dans Σ, $D_{p+q} U(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow D_{p+q}\, u(\vartheta, \varphi)$ lorsque $r \rightarrow 1$, il n'y a qu'un pas.

Si u possède au point (ϑ, φ) une différentielle totale d'ordre $n = p + q$, on décomposera à l'aide de la formule de Taylor u en deux parties : $u = u_n + r_n$ telles que u_n soit analytique et qu'au point (ϑ, φ) $d_\nu u_n = d_\nu u$ $(\nu \leqq n)$. U se décomposera d'une manière corrélative en deux parties : $U = U_n + R_n$. On aura au point (ϑ, φ) $D_{p+q} U_n \rightarrow D_{p+q} u_n = D_{p+q} u$. Or, on peut montrer, à l'aide des propriétés du facteur de discontinuité $\dfrac{1 - r^2}{1 - 2r \cos co + r^2}$ que $D_{p+q} R_n \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 1$. On obtient ainsi le théorème.

En tout point (ϑ, φ) *où* u *possède une différentielle totale d'ordre* $n = p + q$, *on a* $D_{p+q} U(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow D_{p+q}\, u(\vartheta, \varphi)$ *lorsque* $r \rightarrow 1$.

Laissant de côté un théorème analogue concernant la convergence uniforme de $D_{p+q} U$ vers $D_{p+q} u$ nous remarquerons, pour terminer, que si $u \sim \Sigma X_n(\vartheta, \varphi)$ est le développement formel de u en série de Laplace, on a $U(r, \vartheta, \varphi) = \Sigma r^n X_n(\vartheta, \varphi)$. Par conséquent, le procédé de sommation de Poisson est applicable au calcul des dérivées de tout ordre de u, là où elles existent.

La même méthode peut s'appliquer à l'étude des dérivées dans d'autres procédés de sommation, tel celui dans lequel le facteur de convergence r^n de Poisson est remplacé par $e^{-n^2 t}$ $(t \rightarrow 0)$.

11. — Prof. Michel Plancherel (Fribourg). — *Une question d'Analyse.* — Lors de recherches sur l'inscription d'un carré dans une courbe plane fermée et d'un octaèdre régulier dans une surface fermée, j'ai été amené à résoudre dans un cas particulier le problème suivant.

Soit $y = f(x)$ une courbe continue et univoque dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, telle que dans cet intervalle $f(x) \geqq 0$ et que $f(a) = f(b) = 0$. Soient M_1, M_2, deux points mobiles sur cette courbe, assujettis à avoir à chaque instant t les mêmes ordonnées. A l'instant $t = 0$, M_1 se trouve au point (a, o), M_2 au point (b, o). Peut-on coordonner les mouvements de ces deux points de manière à ce qu'ils se rencontrent?

Le problème est équivalent à la détermination de deux fonctions $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ continues dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$, telles que pour $0 \leqq t \leqq 1$

$$a \leqq \Phi_1(t) \leqq b, \quad a \leqq \Phi_2(t) \leqq b$$

$$f(\Phi_1(t)) = f(\Phi_2(t))$$

et que, pour $t = 0$

$$\Phi_1(0) = a, \quad \Phi_2(0) = b$$

et pour $t = 1$

$$\Phi_1(1) = b, \quad \Phi_2(1) = a .$$

Si $f(x)$ n'a qu'un nombre fini d'extrémas dans (a, b), la résolution du problème est immédiate. Il s'agirait de savoir si la seule hypothèse de la continuité de $f(x)$ est suffisante pour assurer la possibilité du problème; si non, quelles conditions supplémentaires devraient être ajoutées.

12. — R. Wavre (Neuchâtel). — *Sur les développements d'une fonction analytique en série de polynômes.* — Soit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$$

une fonction analytique définie par son développement de Taylor au voisinage de $x = 0$:

On sait, en vertu d'un important théorème de Mittag-Leffler, que l'on peut donner de $f(x)$ un développement en série de polynômes représentant cette fonction dans tout le plan sauf sur des droites joignant ses points singuliers au point à l'infini.

Soit

$$M[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} (c_{0n} a_0 + c_{1n} a_1 x + \dots + c_{nn} a_n x^n)$$

un tel développement.

M. Painlevé posait en 1905 la question suivante [1] : Existe-t-il un développement M tel que, quel que soit $f(x)$,

$$M'[f(x)] \equiv M[f'(x)] .$$

La réponse est négative. En effet, un pareil développement serait

[1] Leçons sur les fonctions de variables réelles, par M. E. Borel, Note de M. Painlevé.

de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_{0n} a_0 + c_{0(n-1)} a_1 x + \dots + c_{00} a_n x^n) \quad \text{avec} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{0n} = 1 \ ,$$

appliqué à la fonction $\frac{1}{1-x}$, il divergerait pour $|x| > 1$.

Remarque. — L'auteur a obtenu, peu après la réunion de Neuchâtel, des résultats plus importants en cherchant des développements en série de polynômes d'un type particulier.

13. — Dr S. Bays (Fribourg). — *Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner.* — La question de déterminer le nombre des systèmes de triples de Steiner *différents* semble encore loin d'être résolue. White[1] a montré que pour $N = 31$ déjà, le nombre des systèmes de triples différents dépasse 37×10^{12}. Cole, avec White et Cummings[2], a obtenu les systèmes de triples différents pour $N = 15$; leur nombre est 80. Pour une classe particulière de solutions du problème des triples de Steiner, les systèmes de triples *cycliques,* la question paraît déjà plus aisée. Pour $N = 6n + 1$, premier (ou de la forme p^α), j'ai une méthode permettant d'obtenir les systèmes cycliques de Steiner différents. Elle est basée principalement sur l'emploi des substitutions métacycliques (substitutions de la forme $|x, \alpha + \beta x|$, β premier avec N) ; et elle donne en même temps les groupes de substitutions qui appartiennent à ces systèmes. Jusqu'ici, à deux exceptions près, ces groupes ne sont jamais que des diviseurs du groupe métacyclique. Dans un premier travail[3], j'avais obtenu les systèmes cycliques différents pour les premières valeurs de N, jusqu'à $N = 31$; j'ai depuis appliqué la méthode aux cas $N = 37$ et $N = 43$. Mes résultats jusqu'ici sont ainsi contenus dans le tableau suivant :

N	n	S″	S′	S
7	1	1	1	1
13	2	1	1	1
19	3	2	4	4
31	5	8	64	80
37	6	32	455	820
43	7	157	3067	9514
25	4	2	15	12

S = nombre des systèmes cycliques de triples de Steiner *différents.*

S′ = nombre des systèmes de *caractéristiques.*

S″ = nombre des systèmes de *caractéristiques irréductibles.*

[1] Transactions of the Amer. Mathem. Society, vol. XXI, (1), 1915, p. 13.
[2] Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. III, 1916, p. 197.
[3] Comptes Rendus, tome 165, p. 543, du 22 oct. 1917.

Le nombre S'', nombre des systèmes de *caractéristiques irréductibles l'un à l'autre* par les substitutions d'un groupe cyclique que je note $\{|\underline{x}, \underline{ax}|\}$, a premier avec N, et où j'entends par l'élément *a la valeur absolue du plus petit reste positif ou négatif de a* (*mod.* $\overline{N}$), est maintenant le nombre intéressant du problème. Le nombre S des systèmes cycliques de Steiner différents n'est plus qu'une fonction simple des systèmes S''. J'entrevois une simplification dans la recherche de ces systèmes S'' qui permettra d'effectuer encore la recherche pour le nombre premier suivant $N = 61$, sans exiger trop de temps. Peut-être alors les données seront-elles suffisantes pour chercher à découvrir la fonction S'' de N (N premier) ?

Etats-Unis. — Thèses de doctorat.

Pendant l'année universitaire 1919-1920, les universités américaines ont décerné 16 doctorats ès sciences, traitant plus particulièrement de sujets de mathématiques. En voici la liste d'après *The American math. Monthly* (XXII, 11) : E. M. BERRY (Iowa) : Diffuse Reflection. — J. D. BOND (Michigan) : Plane trigonometry in Richard Wallingford's Quadri partium de sinibus demonstratis. — J. DOUGLAS (Columbia) : On certain two-point properties of general families of curves. — T. C. FRY (Wisconsin) : The use of divergent integrals in the solution of differential equation. — G. GIBBENS (Chicago) : Comparison of different line-geometric representations for functions of a complex variable. — C. F. GREEN (Illinois) : On the summability and regions of summability of a general class of series of the form $\Sigma c_n g(x+n)$. — J. W. LASLEY (Chicago) : Some special cases of the flecnode transformation of ruled surfaces. — E. J. MCFARLAND (California) : On a special quartic curve. — J. J. NASSAU (Syracuse) : Some theorems in alternates. — C. A. NELSON (Chicago) : Conjugate systems with conjugate axis curves. — E. L. POST (Columbia) : Introduction to a general theory of elementary propositions. — M. RAMBO (Michigan) : The point at infinity as a regular point of certain difference equations of the second order. — L. L. STEIMLEY (Illinois) : On a general class of series of the form $Y(n) = C_0 + \Sigma C_n g(nx)$. — J. L. WALSH (Harvard) : On the location of the roots of the jacobian the two binary forms. — R. WOODS (Illinois) : The elliptic mocular functions associated with the elliptic norme curve E^7. — T. YANG (Syracuse) : A problem in differental geometry.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. J. BAUSCHINGER, anciennement professeur d'Astronomie à l'Université de Strasbourg, a été appelé à la chaire d'Astronomie de l'Université de Leipzig.

M. A. Einstein a été nommé membre correspondant de la Société danoise des Sciences.

M. E. Fischer, professeur à l'Université d'Erlangen, a été nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Université de Cologne.

M. A. Föppl, professeur à l'Ecole technique supérieure de Munich, prend sa retraite.

M. R. Grammel, privat-docent à l'Université de Halle, a été nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieure de Stuttgart.

M. G. Kowalewski, professeur à l'Université allemande de Prague, a été nommé professeur ordinaire à l'Ecole technique supérieuse de Dresde.

M. H. Liebmann a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Heidelberg.

M. W. Lietzmann, directeur de l'Ecole réale supérieure, a été chargé de cours pour la didactique des sciences mathématiques à l'Université de Gœttingue.

M. R.-R. Planck a été nommé membre correspondant de la Société danoise des Sciences.

M. E. Steinitz, professeur à l'Ecole technique supérieure de Breslau, a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Kiel.

M. R. Weitzenböck, professeur à l'Université de Prague, a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Graz.

France. — A l'occasion du Congrès international de mathématiciens tenu à Strasbourg, en septembre 1920, la Société des Sciences, Agriculture et Arts du Bas-Rhin, fondée en 1799, a nommé membres d'honneur: MM. L. Crelier, professeur à l'Université de Berne, président de la Société mathématique suisse; Dickson, professeur à l'Université de Chicago; G. Kœnigs, membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne; J. Larmor, professeur à l'Université de Cambridge; Nörlund, professeur à l'Université de Lund, Suède; E. Picard, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, professeur à la Sorbonne; C. De La Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain; Volterra, professeur à l'Université de Rome.

Ecole normale supérieure. — M. Emile Borel a été nommé directeur honoraire de l'Ecole normale supérieure. On sait que c'est M. Vessiot qui a été appelé aux fonctions de sous-directeur en remplacement de M. Borel.

Nécrologie.

M. M. Krause, professeur à l'Ecole technique supérieure de Dresde, est décédé le 2 mars 1920, dans sa 69e année.

J. Perry. — M. John Perry, professeur émérite de Mécanique et de Mathématiques au Royal College of Science, South Kensington, Londres, est décédé le 4 août 1920, à l'âge de soixante-dix ans. De 1875 à 1879 il fut professeur de Mécanique au Japon au Collège impérial des ingénieurs, et de 1881-96 professeur de Mécanique et de Mathématiques au City and Guilds of London Technical College, Finsbury. — Perry prit une part importante à la réforme de l'enseignement mathématique en Angleterre. Dans plusieurs de ses conférences et écrits, il s'éleva contre l'enseignement trop dogmatique de la Géométrie. Il s'attacha principalement aux questions touchant à l'enseignement technique moyen et supérieur en vue d'une meilleure orientation vers la pratique. Parmi ses ouvrages, nous citerons les suivants : Practical Mechanics (1883), Spinning Tops (1890), Calculus for Engineers (1897, traduit en allemand et en russe), Applied Mechanics (1897, traduit en allemand et en français), Practical Mathematics (1899-1910), Elementary Practical Mechanics (1913), England's Neglect of Science (1900), Discussion on the Teaching of Mathematics (1901).

K. Rohn, professeur de Mathématiques à l'Université de Leipzig, est décédé le 4 août 1920, à l'âge de 65 ans. Il avait été professeur à l'Ecole technique supérieure de Dresde de 1885 à 1905. On lui lui doit un traité de Géométrie descriptive, bien connu, publié en collaboration avec M. Papperitz.

M. Hermann Struve, directeur de l'Observatoire de Berlin-Babelsberg et professeur d'Astronomie à l'Université de Berlin depuis 1904, est décédé le 12 août 1920, à l'âge de 66 ans. H. Struve était le fils de O. W. Struve (1819-1905), correspondant de l'Institut de France, directeur de l'Observatoire de Poulkowa, petit-fils de l'astronome F. G. W. Struve (1793-1864) et frère de L. Struve, directeur de l'Observatoire de Kharkow. Né à Poulkowa le 3 octobre 1854, il entra à l'Observatoire de son père en 1877. En 1895, il fut appelé au poste de professeur à l'Université et de directeur de l'Observatoire de Kœnigsberg.