

# ANALYSE INDÉTERMINÉE DU $p^m$ DEGRÉ SUR LES SOMMES DE PUISSANCES ÉGALES DES NOMBRES

Autor(en): **Barbette, Edouard**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1920-1921)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-515719>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ANALYSE INDÉTERMINÉE DU $p^{\text{me}}$ DEGRÉ SUR LES SOMMES DE PUISSANCES ÉGALES DES NOMBRES

PAR

Edouard BARBETTE (Liège).

---

Considérons les  $(p + 1)$  fonctions de  $x$

$$f_1(x) ; f_2(x) ; f_3(x) ; \dots ; f_{p-1}(x) ; f_p(x) ; f_{p+1}(x) .$$

Si nous soustrayons de chacune d'elles, la précédente, nous obtenons les  $p$  différences

$$f_2(x) - f_1(x) ; f_3(x) - f_2(x) ; \dots ; f_p(x) - f_{p-1}(x) ; f_{p+1}(x) - f_p(x) .$$

Si nous soustrayons de chacune de ces différences, la précédente, nous obtenons les  $(p - 1)$  différences

$$f_3(x) - 2f_2(x) + f_1(x) ; f_4(x) - 2f_3(x) + f_2(x) ; \\ \dots ; f_{p+1}(x) - 2f_p(x) + f_{p-1}(x) .$$

En continuant ainsi,  $p$  fois de suite, nous trouvons une fonction

$$F(x) = \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q f_{p-q+1}(x)$$

et cette fonction, si elle est constante, a sa dérivée  $F'(x)$  nulle.

Or, la fonction  $F(x)$  est constante lorsque les fonctions  $f(x)$  sont constituées par la suite des mêmes puissances de nombres en progression arithmétique et, en particulier, par la suite des mêmes puissances des nombres entiers consé-

cutifs ou à intervalles égaux, ou aussi par la suite des mêmes puissances des nombres polygonaux consécutifs ou à intervalles égaux.

Si nous prenons

$$f_{\lambda}(x) = [x + (\lambda - 1)r]^p ,$$

nous trouvons l'égalité

$$F(x) \equiv \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)r]^p = p! r^p \quad (1)$$

et puisque cette fonction  $F(x)$  est constante, sa dérivée par rapport à  $x$  est nulle et nous obtenons l'identité

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)r]^{p-1} = 0 . \quad (2)$$

Si, dans les relations (1) et (2), nous changeons  $r$  en  $kr$ , elles deviennent respectivement

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)kr]^p = p! (kr)^p \quad (1')$$

et

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)kr]^{p-1} = 0 , \quad (2')$$

relations qui s'obtiendraient directement si dans les fonctions  $f(x)$ , au lieu de prendre les termes successifs pour constituer  $F(x)$ , on les prenait en même nombre  $(p + 1)$  mais à intervalle  $k$ .

*En particulier*, si nous prenons  $x = n - p + 1$  et  $r = 1$ , c'est-à-dire si nous identifions les fonctions  $f(x)$  avec la suite des  $(p + 1)$  puissances  $p^{\text{mes}}$  suivantes

$$(n - p + 1)^p ; (n - p + 2)^p ; (n - p + 3)^p ; \\ \dots ; (n - 1)^p ; n^p ; (n + 1)^p ,$$

les identités (1) et (2) deviennent respectivement

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q (n - q + 1)^p = p!$$

ou  $C_p^0 (n + 1)^p - C_p^1 n^p + C_p^2 (n - 1)^p - \dots \pm C_p^p (n - p + 1)^p = p!$

et

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q (n - q + 1)^{p-1} = 0$$

ou  $C_p^0 (n + 1)^{p-1} - C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 (n - 1)^{p-1} - \dots \pm C_p^p (n - p + 1)^{p-1} = 0 .$

Plus particulièrement encore, si dans ces deux dernières égalités, nous faisons  $n = p - 1$ , il vient

$$C_p^0 p^p - C_p^1 (p - 1)^p + C_p^2 (p - 2)^p - \dots \mp C_p^{p-1} 1^p = p!$$

et

$$C_p^0 p^{p-1} - C_p^1 (p - 1)^{p-1} + C_p^2 (p - 2)^{p-1} - \dots \mp C_p^{p-1} 1^{p-1} = 0 .$$

Les identités que nous venons d'établir permettent de résoudre de nombreux problèmes d'analyse indéterminée de tout degré. En voici deux exemples :

1. *Quelles sont les sommes de deux carrés égales au double de la somme de deux carrés ?*

L'équation à résoudre est

$$x^2 + y^2 = 2(z^2 + u^2) .$$

De l'identité

$$C_2^0 (n + 2k)^2 - C_2^1 (n + k)^2 + C_2^2 n^2 = 2k^2$$

ou

$$(n + 2k)^2 + n^2 = 2[(n + k)^2 + k^2] ,$$

nous déduisons la solution

$$x = \lambda(n + 2k) ; \quad y = \lambda n ; \quad z = \lambda(n + k) ; \quad u = \lambda k .$$

2. *Quelles sont les différences de deux carrés égales au triple de la différence de deux carrés ?*

L'équation à résoudre est

$$x^2 - y^2 = 3(z^2 - u^2) .$$

De l'identité

$$C_{\frac{3}{2}}^0(n+3k)^2 - C_{\frac{3}{2}}^1(n+2k)^2 + C_{\frac{3}{2}}^2(n+k)^2 - C_{\frac{3}{2}}^3 n^2 = 0$$

ou

$$(n+3k)^2 - n^2 = 3[(n+2k)^2 - (n+k)^2] ,$$

nous déduisons la solution

$$x = \lambda(n+3k) ; \quad y = \lambda n ; \quad z = \lambda(n+2k) ; \quad u = \lambda(n+k) .$$

*Observation.* Si nous représentons par  $t_n$  le  $n^{\text{me}}$  nombre triangulaire  $\frac{n(n+1)}{2}$  et si nous opérons de même que précédemment, nous trouvons en identifiant les fonctions  $f(x)$  avec les triangulaires successifs :

$$F(x) \equiv \sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q t_{n-q}^p = \gamma ,$$

où  $\gamma = 1$  pour les 1<sup>res</sup> puissances, 6 pour les 2<sup>mes</sup>, 90 pour les 3<sup>mes</sup>, 2520 pour les 4<sup>mes</sup>, etc. ; dérivant par rapport à  $n$ , il vient :

$$\sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q (2n-2q+1)^{p-1} = 0 .$$

Si nous prenons les triangulaires à intervalle  $k$ , nous obtenons respectivement :

$$\sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q t_{n-qk}^p = \gamma \times k^{2p}$$

et

$$\sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q (2n-2qk+1)^{p-1} = 0 .$$

*Et ainsi de suite, pour tous les nombres polygonaux.*

Liège, mai 1920.