Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 21 (1920-1921)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ANALYSE INDÉTERMINÉE DU p^{me} DEGRÉ SUR LES SOMMES DE PUISSANCES EGALES DES NOMBRES

Autor: Barbette, Edouard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515719

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU p^{me} DEGRÉ SUR LES SOMMES DE PUISSANCES ÉGALES DES NOMBRES

PAR

Edouard BARBETTE (Liége).

Considérons les $(p+1)$ fonctions de x

$$f_1(x)\ ;\quad f_2(x)\ ;\quad f_3(x)\ ;\ \ldots\ ;\ f_{p-1}(x)\ ;\quad f_p(x)\ ;\quad f_{p+1}(x)\ .$$

Si nous soustrayons de chacune d'elles, la précédente, nous obtenons les p différences

$$f_2(x)-f_1(x)\ ;\quad f_3(x)-f_2(x)\ ;\ \ldots\ ;\quad f_p(x)-f_{p-1}(x)\ ;\quad f_{p+1}(x)-f_p(x)\ .$$

Si nous soustrayons de chacune de ces différences, la précédente, nous obtenons les $(p-1)$ différences

$$f_3(x)-2f_2(x)+f_1(x)\ ;\quad f_4(x)-2f_3(x)+f_2(x)\ ;$$
$$\ldots\ ;\quad f_{p+1}(x)-2f_p(x)+f_{p-1}(x)\ .$$

En continuant ainsi, p fois de suite, nous trouvons une fonction

$$F(x)=\sum_{q=0}^{q=p}(-1)^q\,C_p^q\,f_{p-q+1}(x)$$

et cette fonction, si elle est constante, a sa dérivée $F'(x)$ nulle.

Or, la fonction $F(x)$ est constante lorsque les fonctions $f(x)$ sont constituées par la suite des mêmes puissances de nombres en progression arithmétique et, en particulier, par la suite des mêmes puissances des nombres entiers consé-

cutifs ou à intervalles égaux, ou aussi par la suite des mêmes puissances des nombres polygonaux consécutifs ou à intervalles égaux.

Si nous prenons

$$f_\lambda(x) = [x + (\lambda - 1)r]^p ,$$

nous trouvons l'égalité

$$F(x) \equiv \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)r]^p = p!\, r^p \qquad (1)$$

et puisque cette fonction $F(x)$ est constante, sa dérivée par rapport à x est nulle et nous obtenons l'identité

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)r]^{p-1} = 0 . \qquad (2)$$

Si, dans les relations (1) et (2), nous changeons r en kr, elles deviennent respectivement

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)kr]^p = p!\,(kr)^p \qquad (1')$$

et

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)kr]^{p-1} = 0 , \qquad (2')$$

relations qui s'obtiendraient directement si dans les fonctions $f(x)$, au lieu de prendre les termes successifs pour constituer $F(x)$, on les prenait en même nombre $(p + 1)$ mais à intervalle k.

En particulier, si nous prenons $x = n - p + 1$ et $r = 1$, c'est-à-dire si nous identifions les fonctions $f(x)$ avec la suite des $(p + 1)$ puissances p^{mes} suivantes

$$(n - p + 1)^p ; \quad (n - p + 2)^p ; \quad (n - p + 3)^p ;$$
$$\ldots ; \quad (n - 1)^p ; \quad n^p ; \quad (n + 1)^p ,$$

les identités (1) et (2) deviennent respectivement

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q (n-q+1)^p = p!$$

ou $$C_p^0 (n+1)^p - C_p^1 n^p + C_p^2 (n-1)^p - \ldots \pm C_p^p (n-p+1)^p = p!$$

et

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q (n-q+1)^{p-1} = 0$$

ou $$C_p^0 (n+1)^{p-1} - C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 (n-1)^{p-1} - \ldots \pm C_p^p (n-p+1)^{p-1} = 0 .$$

Plus particulièrement encore, si dans ces deux dernières égalités, nous faisons $n = p - 1$, il vient

$$C_p^0 p^p - C_p^1 (p-1)^p + C_p^2 (p-2)^p - \ldots \mp C_p^{p-1} 1^p = p!$$

et

$$C_p^0 p^{p-1} - C_p^1 (p-1)^{p-1} + C_p^2 (p-2)^{p-1} - \ldots \mp C_p^{p-1} 1^{p-1} = 0 .$$

Les identités que nous venons d'établir permettent de résoudre de nombreux problèmes d'analyse indéterminée de tout degré. En voici deux exemples :

1. *Quelles sont les sommes de deux carrés égales au double de la somme de deux carrés ?*

L'équation à résoudre est

$$x^2 + y^2 = 2(z^2 + u^2) .$$

De l'identité

$$C_2^0 (n+2k)^2 - C_2^1 (n+k)^2 + C_2^2 n^2 = 2k^2$$

ou

$$(n+2k)^2 + n^2 = 2[(n+k)^2 + k^2] ,$$

nous déduisons la solution

$$x = \lambda(n+2k) \; ; \quad y = \lambda n \; ; \quad z = \lambda(n+k) \; ; \quad u = \lambda k .$$

2. *Quelles sont les différences de deux carrés égales au triple de la différence de deux carrés ?*

L'équation à résoudre est

$$x^2 - y^2 = 3(z^2 - u^2) .$$

De l'identité

$$C_3^0(n + 3k)^2 - C_3^1(n + 2k)^2 + C_3^2(n + k)^2 - C_3^3 n^2 = 0$$

ou

$$(n + 3k)^2 - n^2 = 3[(n + 2k)^2 - (n + k)^2] ,$$

nous déduisons la solution

$$x = \lambda(n + 3k) \; ; \quad y = \lambda n \; ; \quad z = \lambda(n + 2k) \; ; \quad u = \lambda(n + k) .$$

Observation. Si nous représentons par t_n le n^{me} nombre triangulaire $\frac{n(n+1)}{2}$ et si nous opérons de même que précédemment, nous trouvons en identifiant les fonctions $f(x)$ avec les triangulaires successifs :

$$F(x) \equiv \sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q t_{n-q}^p = \gamma ,$$

où $\gamma = 1$ pour les 1res puissances, 6 pour les 2mes, 90 pour les 3mes, 2520 pour les 4mes, etc. ; dérivant par rapport à n, il vient :

$$\sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q (2n - 2q + 1)^{p-1} = 0 .$$

Si nous prenons les triangulaires à intervalle k, nous obtenons respectivement :

$$\sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q t_{n-qk}^p = \gamma \times k^{2p}$$

et

$$\sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q (2n - 2qk + 1)^{p-1} = 0 .$$

Et ainsi de suite, pour tous les nombres polygonaux.

Liége, mai 1920.