ANALYSE INDÉTERMINÉE DU p^{me} DEGRÉ SUR LES SOMMES DE PUISSANCES EGALES DES NOMBRES

ANALYSE INDÉTERMINÉE DU p^{me} DEGRÉ SUR LES SOMMES DE PUISSANCES ÉGALES DES NOMBRES

PAR

Edouard Barbette (Liége).

Considérons les $(p+1)$ fonctions de x

$$f_1(x) \; ; \quad f_2(x) \; ; \quad f_3(x) \; ; \; \ldots \; ; \; f_{p-1}(x) \; ; \quad f_p(x) \; ; \quad f_{p+1}(x) \; .$$

Si nous soustrayons de chacune d'elles, la précédente, nous obtenons les p différences

$$f_2(x) - f_1(x) \; ; \quad f_3(x) - f_2(x) \; ; \; \ldots \; ; \quad f_p(x) - f_{p-1}(x) \; ; \quad f_{p+1}(x) - f_p(x) \; .$$

Si nous soustrayons de chacune de ces différences, la précédente, nous obtenons les $(p-1)$ différences

$$f_3(x) - 2f_2(x) + f_1(x) \; ; \quad f_4(x) - 2f_3(x) + f_2(x) \; ;$$
$$\ldots \; ; \quad f_{p+1}(x) - 2f_p(x) + f_{p-1}(x) \; .$$

En continuant ainsi, p fois de suite, nous trouvons une fonction

$$F(x) = \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q \, C_p^q \, f_{p-q+1}(x)$$

et cette fonction, si elle est constante, a sa dérivée $F'(x)$ nulle.

Or, la fonction $F(x)$ est constante lorsque les fonctions $f(x)$ sont constituées par la suite des mêmes puissances de nombres en progression arithmétique et, en particulier, par la suite des mêmes puissances des nombres entiers consécutifs ou à intervalles égaux, ou aussi par la suite des mêmes puissances des nombres polygonaux consécutifs ou à intervalles égaux.

Si nous prenons

$$f_\lambda(x) = [x + (\lambda - 1)r]^p ,$$

nous trouvons l'égalité

$$F(x) \equiv \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)r]^p = p\,!\, r^p \qquad (1)$$

et puisque cette fonction $F(x)$ est constante, sa dérivée par rapport à x est nulle et nous obtenons l'identité

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)r]^{p-1} = 0 . \qquad (2)$$

Si, dans les relations (1) et (2), nous changeons r en kr, elles deviennent respectivement

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)kr]^p = p\,!\,(kr)^p \qquad (1')$$

et

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q [x + (p - q)kr]^{p-1} = 0 , \qquad (2')$$

relations qui s'obtiendraient directement si dans les fonctions $f(x)$, au lieu de prendre les termes successifs pour constituer $F(x)$, on les prenait en même nombre $(p + 1)$ mais à intervalle k.

En particulier, si nous prenons $x = n - p + 1$ et $r = 1$, c'est-à-dire si nous identifions les fonctions $f(x)$ avec la suite des $(p + 1)$ puissances p^{mes} suivantes

$$(n - p + 1)^p ; \quad (n - p + 2)^p ; \quad (n - p + 3)^p ;$$
$$\ldots ; \quad (n - 1)^p ; \quad n^p ; \quad (n + 1)^p ,$$

les identités (1) et (2) deviennent respectivement

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q (n-q+1)^p = p\,!$$

ou $$C_p^0 (n+1)^p - C_p^1 n^p + C_p^2 (n-1)^p - \dots \pm C_p^p (n-p+1)^p = p\,!$$

et

$$\sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q C_p^q (n-q+1)^{p-1} = 0$$

ou $$C_p^0 (n+1)^{p-1} - C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 (n-1)^{p-1} - \dots \pm C_p^p (n-p+1)^{p-1} = 0\ .$$

Plus particulièrement encore, si dans ces deux dernières égalités, nous faisons $n = p - 1$, il vient

$$C_p^0 p^p - C_p^1 (p-1)^p + C_p^2 (p-2)^p - \dots \mp C_p^{p-1} 1^p = p\,!$$

et

$$C_p^0 p^{p-1} - C_p^1 (p-1)^{p-1} + C_p^2 (p-2)^{p-1} - \dots \mp C_p^{p-1} 1^{p-1} = 0\ .$$

Les identités que nous venons d'établir permettent de résoudre de nombreux problèmes d'analyse indéterminée de tout degré. En voici deux exemples :

1. *Quelles sont les sommes de deux carrés égales au double de la somme de deux carrés ?*

L'équation à résoudre est

$$x^2 + y^2 = 2(z^2 + u^2)\ .$$

De l'identité

$$C_2^0 (n+2k)^2 - C_2^1 (n+k)^2 + C_2^2 n^2 = 2k^2$$

ou

$$(n+2k)^2 + n^2 = 2[(n+k)^2 + k^2]\ ,$$

nous déduisons la solution

$$x = \lambda(n+2k)\ ;\quad y = \lambda n\ ;\quad z = \lambda(n+k)\ ;\quad u = \lambda k\ .$$

2. *Quelles sont les différences de deux carrés égales au triple de la différence de deux carrés ?*

L'équation à résoudre est

$$x^2 - y^2 = 3(z^2 - u^2) .$$

De l'identité

$$C_3^0(n+3k)^2 - C_3^1(n+2k)^2 + C_3^2(n+k)^2 - C_3^3 n^2 = 0$$

ou

$$(n+3k)^2 - n^2 = 3[(n+2k)^2 - (n+k)^2] ,$$

nous déduisons la solution

$$x = \lambda(n+3k) \; ; \quad y = \lambda n \; ; \quad z = \lambda(n+2k) \; ; \quad u = \lambda(n+k) .$$

Observation. Si nous représentons par t_n le n^{me} nombre triangulaire $\frac{n(n+1)}{2}$ et si nous opérons de même que précédemment, nous trouvons en identifiant les fonctions $f(x)$ avec les triangulaires successifs :

$$F(x) \equiv \sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q t_{n-q}^p = \gamma ,$$

où $\gamma = 1$ pour les 1^{res} puissances, 6 pour les 2^{mes}, 90 pour les 3^{mes}, 2520 pour les 4^{mes}, etc. ; dérivant par rapport à n, il vient :

$$\sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q (2n - 2q + 1)^{p-1} = 0 .$$

Si nous prenons les triangulaires à intervalle k, nous obtenons respectivement :

$$\sum_{q-0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q t_{n-qk}^p = \gamma \times k^{2p}$$

et

$$\sum_{q=0}^{q=2p} (-1)^q C_{2p}^q (2n - 2qk + 1)^{p-1} = 0 .$$

Et ainsi de suite, pour tous les nombres polygonaux.

Liége, mai 1920.