SUR LES SYSTÈMES DE NOMBRES BICOMPLEXES

alors, en vertu de (13), H_1 se réduit à α_n et le système (11) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\alpha_1}{dt} = 0 , \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = 0 , \quad \dots \frac{d\alpha_{n-1}}{dt} = 0 , \quad \frac{d\alpha_n}{dt} = 0 \\ \frac{ds_1}{dt} = 0 , \quad \frac{ds_2}{dt} = 0 , \quad \dots \frac{ds_{n-1}}{dt} = 0 , \quad \frac{ds_n}{dt} = -1 . \end{array}\right. \tag{14}$$

L'intégration se fait donc complètement. Les intégrales générales du mouvement avec $2n$ ou $6n'$ constantes arbitraires sont les équations (10).

Royan, 31 mars 1920.

SUR LES SYSTÈMES DE NOMBRES BICOMPLEXES

PAR

L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel).

---

1. — A côté des nombres complexes ordinaires $a + bi$, vulgarisés par les travaux de Gauss et de Cauchy, on a envisagé d'autres nombres qui leur font en quelque sorte pendant et qui ont d'intéressantes applications. Ce sont $a + bj$ (nombres complexes de deuxième espèce), et $a + b\omega$ (nombres complexes de troisième espèce) où les symboles i, j, ω, appelés *unités relatives,* sont définis respectivement par

$$i^2 = -1 , \quad j^2 = +1 , \quad \omega^2 = 0 \tag{1}$$

tandis que a et b représentent toujours des nombres réels dits *coordonnées* de ces complexes.

Théorème. — *Ces trois espèces de nombres représentent les trois seules catégories possibles de nombres complexes à deux coordonnées, quand l'égalité des complexes est définie par l'égalité des coordonnées correspondantes et que le système doit contenir comme sous-groupe le corps des nombres réels.*

Tout système de nombres bicomplexes à multiplication associative et avec unité principale est donc *équivalent* à l'un des trois systèmes

$$a + bi \ , \qquad a + bj \ , \qquad a + b\omega \qquad (2)$$

tandis qu'il est impossible de ramener ceux-ci l'un à l'autre en choisissant une *base* différente dans le corps de nombres envisagé.

2. — Montrons d'abord le sens de ce théorème par quelques exemples. Le premier se présente de suite à l'esprit, quand on cherche à épuiser les possibilités. Ce sont les couples

$$a + be_2 \ ,$$

où l'unité relative e_2 est définie par

$$e_2^2 = e_2 \ . \qquad (3)$$

Le signe $\equiv$ (doublement égal) se prononce « égal par définition ». Si $y \equiv y_1 + y_2 e_2$ et $x \equiv x_1 + x_2 e_2$ sont de ces nombres (que nous appellerons ici nombres complexes *de* 4^e *espèce*), l'égalité $x = y$ entraînera par définition les deux égalités simultanées entre nombres réels

$$x_1 = y_1 \ , \qquad x_2 = y_2 \ .$$

Soumettons ces nouveaux nombres au calcul « selon les règles de l'algèbre ordinaire », en tenant compte de (3). On voit que l'addition, la soustraction et la multiplication, résumées par les formules

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1) + (x_2 \pm y_2) e_2$$
$$xy = yx = x_1 y_1 + (x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2) e_2 \ ,$$

sont toujours possibles et univoques. De plus, l'ensemble de ces nouveaux nombres contenant comme sous-groupe le corps des nombres réels, un nombre de 4e espèce est dit *réel*, lorsque sa deuxième coordonnée est nulle. Au complexe arbitrairement choisi x, on fera correspondre, comme *conjugué*, le nombre complexe $x' \equiv (x_1 + x_2) - x_2 e_2$. On constate que le conjugué du conjugué du nombre x est ce nombre

x lui-même, et que le produit d'un complexe x par son conjugué x' est un nombre réel que l'on appellera *la norme* de x, en formules :

$$\mathrm{N}(x) \equiv xx' = x_1(x_1 + x_2) .$$

La norme d'un produit est égale au produit des normes des facteurs. La norme d'un nombre complexe de 4e espèce est donc nulle dans deux cas : lorsque la première coordonnée est nulle, ou lorsque les deux coordonnées sont opposées. Dans ces deux cas, le nombre x est *diviseur de zéro.* Un produit peut donc être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit :

$$re_2 . (r - re_2) = r^2 e_2 - r^2 e_2 = 0$$

quel que soit le nombre réel r. C'est d'ailleurs la seule infraction aux dix règles fondamentales de l'algèbre ordinaire.

Le nombre complexe x sera dit « quotient de a par b » et l'on écrira $x = a : b$ ou $\frac{a}{b}$ si, a et b étant des complexes donnés de quatrième espèce, d'ailleurs quelconques, x satisfait à l'égalité $bx = a$. Lorsque b n'est pas diviseur de zéro, la division par b est toujours possible et univoque et l'on voit que

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 b_2 - b_1 a_2}{b_1(b_1 + b_2)} e_2 .$$

Si b est diviseur de zéro, le quotient $a : b$ est ou indéterminé, ou inexistant.

En résumé, les quatre opérations rationnelles sont toujours possibles et univoques dans le domaine de ces nombres complexes, sauf la division par des diviseurs de zéro.

3. — C'est « l'équivalence » de ces nouveaux nombres bicomplexes avec l'un des systèmes (2) qui nous intéresse ici. Dans le corps constitué par l'ensemble de tous les nombres complexes de 4e espèce, prenons comme nouvelles *unités relatives*

$$t_1 \equiv 1 , \qquad t_2 \equiv 1 - 2e_2 , \qquad \text{d'où} \qquad e_2 = \frac{1}{2}(1 - t_2) .$$

Il s'ensuit :

$$t_2^2 = (1 - 2e_2)^2 = 1 - 4e_2 + 4e_2 = 1 .$$

Tout nombre de quatrième espèce, $x_1 + x_2 e_2$, peut donc s'écrire à l'aide de cette nouvelle base

$$x_1 + x_2 \frac{1 - t_2}{2} = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right) - \frac{x_2}{2} t_2 \equiv m_1 + m_2 t_2 \; .$$

Comme $t_2^2 = 1$, on peut remplacer $m_1 + m_2 t_2$ par $m_1 + m_2 j$, avec $j^2 = 1$. C'est précisément ce que nous appelons un nombre complexe de deuxième espèce

La transformation inverse n'est pas plus difficile. Dans le corps des complexes de deuxième espèce, prenons comme nouvelles unités relatives

$$b_1 \equiv 1 \; , \qquad b_2 \equiv \frac{1}{2}(1 - j) \; .$$

Il s'ensuit :

$$b_2^2 = \frac{1}{4}(1 - j)^2 = \frac{1}{4}(2 - 2j) = \frac{1}{2}(1 - j) = b_2 \qquad (4)$$

et tout complexe de deuxième espèce, $r_1 + r_2 j$, peut s'écrire :

$$r_1 + r_2(1 - 2b_2) = (r_1 + r_2) - 2r_2 b_2 \equiv y_1 + y_2 b_2 \; .$$

En vertu de (4), on peut remplacer l'écriture b_2 par e_2, en tenant compte de (3), et l'on voit $r_1 + r_2 j$, complexe de deuxième espèce choisi arbitrairement, apparaître sous forme d'un complexe de quatrième espèce $y_1 + y_2 e_2$.

4. — La correspondance est uni-univoque. On démontre facilement que toute équation $R(a, b, c, \ldots) = 0$ entre nombres complexes de deuxième espèce reste exacte si l'on y remplace $a, b, c, \ldots$ par leurs correspondants dans le corps des complexes de quatrième espèce, à condition que R symbolise un nombre fini d'opérations rationnelles. C'est ce que nous entendons en disant que les règles de multiplication résumées par les tableaux

↗	e_0	e_1
e_0	e_0	e_1
e_1	e_1	e_0

et

↗	e_0	e_2
e_0	e_0	e_2
e_2	e_2	e_2

(5)

ou plus simplement, en désignant l'unité principale par 1 (au lieu de l'écrire e_0), les règles de multiplication

$$e_1^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad e_2^2 = e_2 \ ,$$

définissent deux systèmes *équivalents* de nombres bicomplexes.

5. — Comme second exemple, soit le système des nombres $x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1$ (nombres complexes de cinquième espèce), où les unités relatives e_0 et e_1 satisfont aux relations

$$\left.\begin{array}{c} e_0^2 = e_0 \ , \qquad e_1^2 = e_1 \\ e_0 e_1 = e_1 e_0 = 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

résumées par le tableau

	e_0	e_1
e_0	e_0	0
e_1	0	e_1

(6′)

En calculant sur ces nouveaux nombres « selon les règles de l'algèbre ordinaire » et tenant compte de (6), on constate que l'addition, la soustraction et la multiplication sont toujours possibles et univoques et que, dans ce système, c'est $(e_0 + e_1)$ qui joue le rôle du nombre 1, puisque

$$(e_0 + e_1)^n = e_0 + e_1 \ , \qquad \text{et} \qquad x.(e_0 + e_1) = x \ \cdot$$

On peut donc poser

$$e_0 + e_1 = 1 \tag{7}$$

et adopter cette définition: un nombre complexe de cinquième espèce est dit *réel, lorsque ses deux coordonnées sont égales*.

Pour introduire la division comme opération inverse de la multiplication, on est amené à faire correspondre au complexe $x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1$, comme *conjugué*, le complexe $x' \equiv x_1 e_0 + x_0 e_1$, car le produit

$$xx' = x_0 x_1 (e_0 + e_1) = x_0 x_1$$

est réel, en vertu de (7). C'est *la norme* de x. Dans ce système, la norme d'un nombre complexe est donc égale au produit de ses deux coordonnées :

$$\mathrm{N}(x) \equiv xx' = x_0 x_1 \ .$$

Si une coordonnée est nulle, le complexe est diviseur de zéro. Si $b \equiv b_0 e_0 + b_1 e_1$ n'est pas diviseur de zéro, on voit qu'il faut entendre par « le quotient $a : b$ » le complexe

$$\frac{ab'}{bb'} = \frac{a_0}{b_0} e_0 + \frac{a_1}{b_1} e_1$$

et l'on aura ainsi défini les quatre opérations rationnelles dans ce nouveau système. Un produit peut y être nul sans qu'aucun des facteurs ne le soit, par exemple $e_0 e_1 = 0$. Mais ici encore, l'existence des diviseurs de zéro constitue la seule infraction aux dix règles fondamentales de l'algèbre classique.

6. — Pour montrer *l'équivalence* de ces nombres complexes de cinquième espèce avec l'un des systèmes (2), choisissons, dans le corps qu'ils constituent, comme nouvelles unités relatives

$$t_1 \equiv e_0 + e_1 \ , \qquad t_2 \equiv e_0 - e_1 \ .$$

On voit qu'alors, $t_2^2 = e_0 + e_1 = 1$ et que tout complexe de cinquième espèce, $x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1$, peut s'écrire :

$$x_0 \cdot \frac{1}{2}(t_1 + t_2) + x_1 \cdot \frac{1}{2}(t_1 - t_2) = \left(\frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right) t_1 + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{x_1}{2}\right) t_2$$

$$\equiv z_1 t_1 + z_2 t_2 \ .$$

Comme t_1 joue le rôle du nombre 1 et que $t_2^2 = 1$, on peut écrire : 1 au lieu de t_1 et j au lieu de t_2. Dès lors, le complexe envisagé, x, apparaît sous forme de complexe de deuxième espèce : $z_1 + z_2 j$.

Les formules précédentes permettent immédiatement le passage inverse. En prenant, dans le corps $\{1, j\}$, comme nouvelles unités relatives

$$e_0 \equiv \frac{1}{2}(1+j), \qquad e_1 \equiv \frac{1}{2}(1-j),$$

tout nombre de deuxième espèce, $r_1 + r_2 j$, apparaît sous forme d'un complexe de cinquième espèce, $t_0 e_0 + t_1 e_1$ avec les règles de multiplication (6), et l'on démontre aisément que toute équation algébrique telle que $\mathrm{R}(a, b, c, \ldots) = 0$, reste exacte en regard de cette transformation, au sens de l'article 4 ci-dessus.

7. — Envisageons le cas général d'un système de nombres bicomplexes $a \equiv a_1 i_1 + a_2 i_2$, où l'égalité et l'addition des complexes sont définies respectivement par l'égalité et l'addition des coordonnées correspondantes, et la multiplication par les formules

$$\left.\begin{array}{l} i_1^2 = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 \\ i_1 i_2 = \alpha_5 i_1 + \alpha_6 i_2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} i_2^2 = \alpha_3 i_1 + \alpha_4 i_2 \\ i_2 i_1 = \alpha_7 i_1 + \alpha_8 i_2 \end{array}. \tag{8}$$

Comme les huit nombres α_n sont réels quelconques, il existe une infinité octuple de systèmes différents de nombres bicomplexes. On les a classifiés.

Deux systèmes sont dits *équivalents*, ou *holoédriquement isomorphes*, s'il est possible de choisir, dans les corps de nombres qu'ils constituent, à la place de i_1, i_2, des unités relatives telles que l'un des systèmes se ramène à l'autre, comme dans les exemples ci-dessus traités. Entre les nombres de deux systèmes holoédriquement isomorphes, on peut établir une correspondance uni-univoque qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° A tout nombre x du premier correspond un et un seul nombre ξ du second, et réciproquement.

2° A la somme $x + z$ et au prodnit xz (ou zx) de deux nombres complexes quelconques, x, z, de l'un des systèmes correspondent respectivement la somme $\xi + \zeta$ et le produit $\xi\zeta$ (ou $\zeta\xi$) des deux nombres correspondants ξ, ζ, de l'autre système. Il suit de là que toute équation algébrique

$$\mathrm{F}(a, b, \ldots, x) = 0$$

entre nombres du premier système reste exacte si l'on remplace les complexes a, b, ..., x, qui figurent dans cette équation par leurs correspondants respectifs de l'autre système : a par α; b par β; etc.; x par ξ. On dit aussi, dans ce cas, que les deux corps de nombres envisagés *sont une permutation l'un de l'autre.*

Il est aisé de démontrer que deux systèmes équivalents à un même troisième sont équivalents entre eux. Ainsi, les trois systèmes de nombres que définissent les deux tableaux (5) et le tableau (6′) sont holoédriquement isomorphes. Quand deux systèmes de nombres complexes sont équivalents, on convient de dire qu'ils « appartiennent à la même *forme* ».

Voici l'un des théorèmes fondamentaux de cette théorie : *si l'on pose comme condition que le système doit contenir comme sous-groupe les nombres réels, il n'y a que trois formes distinctes de nombres bicomplexes.* Ce sont les formes que représentent les systèmes ci-dessus définis par (1) et (2). *Ils sont tous à multiplication commutative.*

Si l'on ne pose pas la condition de contenir comme sous-groupe le corps des nombres réels, on admet des systèmes *sans unité principale,* systèmes où n'existe aucun complexe jouissant des propriétés caractéristiques du nombre 1 (systèmes *nilpotents*). Il y a parmi eux des systèmes à multiplication non commutative. On en obtient quand, par exemple, dans les formules (8) on ne fait pas simultanément

$$\alpha_5 = \alpha_7 \quad \text{et} \quad \alpha_6 = \alpha_8 \ .$$

Il est remarquable que, pour ces systèmes bicomplexes, la non-commutativité de la multiplication soit incompatible avec l'existence d'une unité principale, 1.

8. — En nous plaçant au point de vue de l'arithnomie, nous allons compléter le théorème fondamental ci-dessus énoncé. A cet effet, dans chaque système de nombres bicomplexes, envisageons le corps $\{R\}$ constitué par l'ensemble de ceux dont les deux coordonnées sont rationnelles. Pour ériger une arithnomie dans $\{R\}$, le premier pas à faire consiste à scinder ce corps en deux ensembles, mettant d'un côté les complexes « entiers », de l'autre les complexes « non entiers ». Pour cela, comme nous l'avons montré ailleurs, il faut déterminer préalablement « le domaine holoïde maximal » de $\{R\}$, puis définir « nombres entiers » les complexes qui en font partie, à l'exclusion des autres qui sont réputés « nombres non entiers ». En combinant ceci avec le théorème cité, nous pouvons énoncer cette proposition : *Dans les systèmes de nombres bicomplexes contenant comme sous-groupe les nombres réels, il n'y a que trois possibilités au point de vue de la définition du complexe « entier ».*

1° Le domaine holoïde maximal du corps $\{R\}$ est constitué par l'ensemble des complexes à coordonnées entières. Dans ce cas, la définition du complexe entier est univoque et coïncide avec la définition habituelle : complexe entier $\equiv$ complexe à coordonnées entières.

2° Le domaine holoïde maximal de $\{R\}$ comprend, en plus de *tous* les complexes à coordonnées entières, encore d'autres à coordonnées fractionnaires. Dans ce cas, la définition du complexe entier est encore univoque, mais un nombre bicomplexe peut être « entier » quoiqu'ayant des coordonnées qui ne le sont pas toutes.

3° Le corps $\{R\}$ est dépourvu de domaine holoïde maximal. Dans ce cas, la définition du complexe entier est indéterminée. L'arithnomie qui en découle cesse de présenter la simplicité de la théorie classique des nombres.

Ajoutons que dans les nombres hypercomplexes à plus de deux coordonnées, il s'introduit une quatrième possibilité : le corps $\{R\}$ peut contenir plusieurs domaines holoïdes maximaux différents. Dans ce cas, la définition du complexe entier devient plurivoque.