EXTENSION
DU PROBLÈME DES TRIANGLES HÉRONIENS

PAR

C.-A. LAISANT (Paris).

---

1. — Le problème des triangles héroniens a pour objet la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$\frac{c^2 - a^2}{b^2} = 1 \ .$$

Il se résout, on le sait, x, y étant deux entiers quelconques, par les expressions

$$c = x^2 + y^2 \ , \qquad a = x^2 - y^2 \ , \qquad b = 2xy \ .$$

On peut aussi, ce qui revient au même, prendre une fraction quelconque $\frac{x}{y}$ à termes entiers, son inverse $\frac{y}{x}$, puis former la demi-somme et la demi-différence de ces deux fractions $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{x}$. Les deux résultats qu'on obtient sont les fractions $\frac{c}{b}$ et $\frac{a}{b}$.

2. — La question que nous nous proposons d'examiner ici consiste dans la résolution du système

$$\frac{c^2 - a^2}{bb_1} = \lambda \qquad \frac{b_1}{b} = \mu \ ,$$

c, a, b, b_1 devant être des nombres entiers, et λ, μ deux nombres donnés commensurables. Pour $\lambda = \mu = 1$, elle se confond avec le problème des triangles héroniens.

Soit $\lambda = \frac{x}{y'}$, $\mu = \frac{x'}{y}$; formons les fractions $\left(\frac{x}{y}, \frac{x'}{y'}\right)$ et déterminons en la demi-somme et la demi-différence

$$\frac{xy' + x'y}{2yy'}, \quad \frac{xy' - x'y}{2yy'}.$$

Considérons maintenant les deux fractions $\left(\frac{x}{x'}, \frac{y}{y'}\right)$ résultant de la permutation des deux éléments y, x', et répétons les mêmes opérations. Les résultats obtenus seront

$$\frac{xy' + x'y}{2x'y'}, \quad \frac{xy' - x'y}{2x'y'}.$$

Posant $c = xy' + x'y$, $a = xy' - x'y$, $b = 2yy'$, $b_1 = 2x'y'$, nous avons $c^2 - a^2 = 4xyx'y'$, $\frac{c^2 - a^2}{bb_1} = \frac{x}{y'}$, $\frac{b_1}{b} = \frac{x'}{y}$.

On peut évidemment, si $\frac{x}{y'}$, $\frac{x'}{y}$ sont des fractions irréductibles, remplacer (x, y') d'une part, et (x', y) de l'autre, par des équimultiples quelconques de ces termes.

Lorsque l'on est conduit à des résultats c, a, b qui ont un facteur commun, il y a lieu de les diviser par ce facteur pour obtenir la solution la plus simple. Cela se produit notamment quand les quatre nombres x, y, x', y' sont impairs, car on trouve alors des nombres pairs pour c et pour a, et b, b_1 sont pairs par définition.

Réciproquement, une solution (c, a, b, b_1) étant connue, on en a une autre en multipliant ces quatre éléments par un nombre entier quelconque. Nous dirons qu'une solution est *primitive* quand c, a, b, b_1 sont premiers dans leur ensemble, par analogie avec les triangles héroniens primitifs. Comme c et a sont de même parité, cela entraîne cette conséquence qu'ils doivent être impairs dans une solution primitive, puisque b et b_1 sont pairs.

3. — Revenons à l'équation $\frac{c^2 - a^2}{b^2} = \lambda$, où λ est un nombre commensurable donné. Si $\lambda = \frac{x}{z}$, formons les deux fractions $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, y étant un nombre entier quelconque, et x, z pouvant être remplacés par des équimultiples quelconques s'ils sont premiers entre eux. Formant ensuite la demi-

somme et la demi-différence de ces deux fractions, nous avons comme résultats $\frac{c}{b}$, $\frac{a}{b}$, donnant une solution de l'équation $\frac{c^2 - a^2}{b^2} = \frac{x}{z} = \lambda$. Les expressions de c, a, b sont

$$c = xz + y^2 , \qquad a = \pm (xz - y^2) , \qquad b = 2yz .$$

Pour $x = z$, elles se confondent avec la solution d'un triangle héronien.

Parmi les solutions, en nombre infini, qu'on peut ainsi obtenir, il y a lieu de distinguer celles qu'on peut appeler *triangulaires,* c'est-à-dire telles que c, a, b expriment les trois côtés d'un triangle. Cela exige la condition que b soit compris entre $c - a$ et $c + a$. Les autres sont *non-triangulaires.* A la limite, on rencontre les solutions *linéaires,* correspondant à des triangles aplatis en ligne droite, dans lesquels b est égal à $c - a$ ou à $c + a$.

Si $xz > y^2$, y doit être inférieur à x et à z pour qu'une solution soit triangulaire; si $xz < y^2$, y doit surpasser à la fois x et z. Posons $y = x$, ou $y = z$, on a des solutions linéaires.

4. — *Applications numériques.* — Nous allons montrer, sur quelques exemples simples, comment on peut obtenir des solutions des questions indiquées ci-dessus.

Système $\frac{c^2 - a^2}{bb_1} = \lambda$, $\frac{b_1}{b} = \mu$. — Soit $\lambda = \frac{7}{3}$, $\mu = \frac{2}{5}$. Posons $x = 7$, $y = 2$, $x' = 5$, $y' = 3$, et formons les fractions

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{3}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} - \frac{5}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{31}{12}, \quad \frac{11}{12},$$

puis

$$\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} + \frac{2}{3}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} - \frac{2}{3}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{31}{30}, \quad \frac{11}{30}.$$

Nous avons ainsi

$$\frac{31^2 - 11^2}{12.30} = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

En remplaçant 7 et 3 par 21 et 9, on obtiendrait

$$\frac{199^2 - 179^2}{36.90} = \frac{7}{3} \quad \text{et} \quad \frac{36}{90} = \frac{2}{5}.$$

Si on se donnait $\lambda = \mu = \frac{7}{3}$, on pourrait poser

$$x = 21 \ , \quad y = 7 \ , \quad x' = 3 \ , \quad y' = 9 \ ,$$

et cela donnerait $c = 210$, $a = 168$, $b = 54$, $b_1 = 126$, ou (solution simplifiée) $c = 35$, $a = 28$, $b = 9$, $b_1 = 21$

$$\frac{35^2 - 28^2}{9.21} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \ .$$

Equation $\frac{c^2 - a^2}{b^2} = \lambda$. — Soit $\lambda = \frac{12}{7}$. En formant les fractions $\frac{12m}{y}$, $\frac{y}{7m}$, m et y étant des entiers quelconques, et en effectuant les opérations indiquées, on trouvera notamment les résultats indiqués ci-dessous, et sur lesquels les vérifications sont faciles. Si y est compris entre $12m$ et $7m$, on aura une solution non triangulaire; si y est inférieur à $7m$ ou supérieur à $12m$, la solution sera triangulaire; enfin, pour $y = 7m$, ou $y = 12m$, on aura des solutions linéaires

c	a	b			
85	83	14	Solution	triangulaire.	
31	25	14	»	»	(simplifiée).
19	5	14	»	linéaire (simplifiée).	
55	1	42	»	non triangulaire (simplifiée).	
205	37	154	»	»	»
337	335	28	»	triangulaire.	

Si, au lieu de $\lambda = \frac{12}{7}$ on avait pris $\lambda = \frac{7}{12}$, on rencontrerait les solutions qui suivent, et qu'on pourra rapprocher des précédentes, les éléments c et a restent les mêmes :

c	a	b			
85	83	24	Solution	triangulaire.	
31	25	24	»	»	(simplifiée).
19	5	24	»	linéaire (simplifiée).	
55	1	72	»	non triangulaire (simplifiée).	
205	37	264	»	»	»
337	335	48	»	triangulaire.	

Mars 1920.